

# **Zur Modellierung plattenförmiger Bauteile**

Von der  
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina  
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines  
**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**  
genehmigte

## **Dissertation**

von  
Anke Busse  
aus Brandenburg

Eingereicht am 26. Juni 2006

Mündliche Prüfung am 08. Juni 2007

Berichterstatter  
Prof. Dr. rer. nat. H. Antes  
Prof. Dr.-Ing. M. Schanz  
Prof. Dr.-Ing. S. Langer

2008

## **Zusammenfassung**

Bei der Planung eines Bauwerkes müssen im voraus Aussagen über das Schalldämmverhalten eines Bauteils getroffen werden, was aufgrund der komplexen Wechselwirkungen zwischen Materialien, Bauelementen und Umgebung sehr schwierig sein kann. Deswegen gewinnen numerische Verfahren zur Berechnung des Schalldurchgangs durch Wände immer mehr an Bedeutung. Da Wände in der Regel aus porösem Material bestehen, z.B. aus Beton oder Ziegeln, ist eine möglichst realitätsnahe Abbildung als poroelastische plattenförmige Bauteile für die Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung des Schalldurchgangs durch poröse Wände eine sinnvolle Grundlage. Dazu wird die poröse Struktur in geeigneter Weise erfasst und zur numerischen Berechnung als ebenes Flächentragwerk aufbereitet.

Dabei wird ein mit Hilfe der Theorie von Biot beschriebenes dreidimensionales poroelastisches Kontinuum mit Hilfe einer Reihenentwicklung bezüglich der Dickenkoordinate in ein zweidimensionales Kontinuum überführt. Einerseits kann die Reihe nach einer bestimmten Ordnung der Freiwerte abgebrochen werden, andererseits besteht die Möglichkeit die Reihenentwicklung nach einer bestimmten Potenz der Plattendicke abzubrechen. Je nach Wahl des Abbruchpunktes entstehen Scheiben- und Plattentheorien unterschiedlicher Ordnung, wobei auf die Scheibentheorien nur kurz eingegangen wird.

Die hergeleiteten poroelastischen Plattengleichungen werden in Finite-Element-Formulierungen überführt. Die Plattentheorien unterschiedlicher Ordnung werden miteinander verglichen und anhand von Berechnungen des Verhaltens einer Felsplatte verifiziert. Außerdem wird das Verhalten von einigen Schäumen untersucht.

## **Abstract**

The prediction of the acoustical behavior of a building can be very complicated because of the interaction between material, construction and surrounding. The numerical treatment of noise insulation of solid walls has been an object of scientific research for several years. The main noise source is the bending vibration of the walls modeled by plate theory. In general, walls consist of porous material, e.g., concrete or bricks. Therefore a poroelastic plate theory is useful to establish a basis to develop a numerical model for sound transmission through porous walls.

Starting from the 3-D-Formulation for a poroelastic continuum using Biot's Theory, a 2-D theory is established by series expansion of the thickness coordinate. Depending on the point of truncation plate theories of different order are developed. The series can be truncated after a defined order of the thickness coordinate or after a defined power of the plate thickness.

A Finite Element methodology is developed to analyze the behaviour of different plates numerically. Plate theories of different order are compared to each other and will be verified by the analysis of a rock plate and a foam plate.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Stand der Forschung . . . . .	3
1.2	Ziel der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Biot'sche Theorie</b>	<b>7</b>
2.1	Stoffgesetz und Kinematik . . . . .	7
2.2	Bewegungsgleichungen . . . . .	9
2.3	Frequenzabhängige Formulierung . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Plattentheorie</b>	<b>13</b>
3.1	Klassische Plattentheorie . . . . .	13
3.2	Erweiterte Plattentheorien . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Herleitung von Plattentheorien durch Reihenentwicklung</b>	<b>21</b>
4.1	Herleitung elastischer Plattentheorien . . . . .	21
4.1.1	Abbruch der Potenzreihe nach linearen Reihengliedern . . . . .	26
4.1.2	Abbruch der Potenzreihe nach quadratischen Reihengliedern . . . . .	29
4.1.3	Abbruch der Potenzreihe nach kubischen Reihengliedern . . . . .	32
4.1.4	Betrachtungsweise von Kienzler . . . . .	36
4.2	Herleitung der poroelastischen Plattengleichungen . . . . .	38
4.2.1	Abbruch der Reihe nach linearen Reihengliedern für die poroelastische Platte . .	42
4.2.2	Abbruch der Potenzreihe nach quadratischen Reihengliedern für die poroelastische Platte . . . . .	47
4.2.3	Abbruch der Potenzreihe nach kubischen Reihengliedern für die poroelastische Platte . . . . .	50
4.2.4	Herleitung einer poroelastischen Plattentheorie nach der Methode von Kienzler .	55
<b>5</b>	<b>Numerische Umsetzung</b>	<b>57</b>
5.1	Finite-Element-Formulierung für die poroelastische Platte . . . . .	57

5.1.1	Abbruch der Reihenentwicklung nach linearen Reihengliedern . . . . .	57
5.1.2	Abbruch der Reihenentwicklung nach quadratischen Reihengliedern . . . . .	59
5.1.3	Abbruch der Reihenentwicklung nach kubischen Reihengliedern . . . . .	61
5.1.4	Poroelastische Platte nach Kienzler . . . . .	63
5.2	FE-Formulierung für die poroelastische Scheibe . . . . .	66
5.3	Wahl der Elemente . . . . .	67
5.3.1	Das DSG-Element . . . . .	67
5.3.2	Überprüfung der Plattenelemente . . . . .	69
5.4	Diskretisierung . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Beispiele</b>	<b>71</b>
6.1	Belastete poroelastische Felsplatte . . . . .	71
6.2	Belastete poroelastische Schaumplatte . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>
	<b>Verzeichnis der verwendeten Symbole</b>	<b>89</b>

# 1 Einleitung

Bei der Planung moderner Bauten spielen neben konstruktiven und ästhetischen Gesichtspunkten auch bauphysikalische Aspekte eine große Rolle. Dabei kommt dem Schutz der Bewohner vor Lärm eine wachsende Bedeutung zu.

Lärm ist zu einem ständigen Begleiter unseres Lebens, besonders in Großstädten, geworden. Die unterschiedlichen Nutzungen in einer Stadt auf engem Raum wie Wohnen, Arbeiten und Verkehr führen nahezu zwangsläufig zu Konflikten über dessen Zumutbarkeit bzw. Unzumutbarkeit. In den letzten Jahren hat sich daher die Erkenntnis immer mehr durchgesetzt, dass Lärm eine ernstzunehmende Umweltbelastung ist. Durch ständige Geräuschbelastung kann es direkt und indirekt zu Beeinträchtigungen des Wohlbefindens und auch der Gesundheit des Einzelnen kommen. Studien belegen eindeutig, dass Lärm die Konzentrationsfähigkeit herabsetzt und zu Leistungs- und Schlafstörungen führen kann. Ständig andauernde Stressbelastung durch Lärm kann sogar Erkrankungen des Herz-Kreislaufsystems verursachen. Auch die Gefahr von Schädigungen des Gehörs durch Lärmbelastung ist nicht zu unterschätzen.

Trotz technischer Maßnahmen wie z.B. dem Bau von Lärmschutzwänden, der Verwendung geräuscharmer Reifen oder schallschluckender Straßenbeläge ist die Geräuschbelastung in den letzten Jahren nicht gesunken, sondern eher angestiegen. Da die Möglichkeiten, die Entstehung des Lärms zu verhindern, begrenzt sind, sind schalldämmende Maßnahmen an Gebäuden zur Verringerung der Geräuschmmissionen unverzichtbar. Bei der Planung eines Bauwerkes müssen im voraus Aussagen über das Schalldämmverhalten eines Bauteils getroffen werden, was aufgrund der komplexen Wechselwirkungen zwischen Materialien, Bauelementen und Umgebung sehr schwierig sein kann. Den bauphysikalischen Schallschutznachweisen liegen in der Regel Mess- oder Erfahrungswerte an einzelnen Referenzbauteilen zugrunde, aus denen die Schalldämmung des gesamten Bauwerkes ermittelt wird, was allerdings kostenaufwendig und unflexibel ist. Deswegen wird schon seit Jahren angestrebt, numerische Berechnungsverfahren für den Schalldurchgang durch Wände zu entwickeln [49, 1].

Solche Verfahren können nicht nur in der Bauakustik hilfreich sein, sondern überall wo poröse plattenförmige Bauteile zur Schalldämmung zum Einsatz kommen, z.B. in der Automobilindustrie oder im Flugzeugbau.

Wände bestehen in der Regel aus porösem Material, z.B. Beton oder Ziegeln. In früheren Arbeiten wurden poröse Wände meist als elastische Mindlin-Platten modelliert, deren Materialverhalten mit Hilfe eines durch Homogenisierungsverfahren ermittelten E-Moduls erfasst wurde. In dieser Arbeit wird statt dessen das Material der Platte mit Hilfe des poroelastischen Materialgesetzes nach Biot erfasst und verschiedene Plattentheorien mit Hilfe von Reihenentwicklungen hergeleitet. Durch die möglichst realitätsnahe Abbildung des Verhaltens poroelastischer plattenförmiger Bauteile wird eine Grundlage der Entwicklung eines Verfahrens für die Berechnung des Schalldurchgangs durch poröse Wände geschaffen.

## 1.1 Stand der Forschung

Die Modellierung der Schalltransmission durch Wände stellt ein über die Oberfläche gekoppeltes Mehrfeldproblem dar. Hierbei treten die Wände über ihre Deckflächen mit der Umgebungsluft in komplexe Wechselbeziehungen. In früheren Arbeiten wurden die Wände als elastische Platten modelliert, wobei poröses Material durch die Verwendung eines mit Hilfe von Homogenisierungsverfahren ermittelten E-Moduls erfasst wurde [49, 1].

Die Modellierung der Wände erfolgt in dieser Arbeit als poroelastische dickere Platte, wobei ein Gleichungssystem mit mindestens einem zusätzlichen Freiheitsgrad, z.B. dem Porendruck entsteht. Eine Theorie für eine poroelastische Kirchhoffplatte wurde bereits entwickelt [70]. Diese Theorie gilt allerdings nur für sehr dünne Platten. Da es sich bei Wänden um dickere Platten handelt, ist diese Theorie auf die Problemstellung dieser Arbeit nur im begrenzten Rahmen anwendbar.

Die klassische elastische Plattentheorie wurde 1850 von Kirchhoff entwickelt [47]. Für dieses Plattenmodell wird näherungsweise angenommen, dass die Dehnungen und Gleitungen in Dickenrichtung so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können. Die Platte ist somit in Dickenrichtung, dehn- und schubstarr. Diese Annahmen haben zur Folge, dass eine Normale zur unverformten Plattenmittelfläche auch nach der Verformung Normale der Mittelfläche ist. Diese Theorie liefert für dünne Platten gute Ergebnisse. Sie führt auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung. Daher können an jedem Rand nur zwei Randbedingungen erfüllt werden. Es treten aber drei Schnittgrößen beziehungsweise drei Verformungen auf. Dieses Problem kann umgangen werden, indem man das Torsionsmoment und die Querkraft am Rand zu einer Ersatzquerkraft zusammenfasst [4].

Obwohl die klassische Plattentheorie für technische Auslegungen oft genügt, haben sich zahlreiche Forscher mit ihrer Weiterentwicklung beschäftigt. Hencky [40] behielt die kinematische Annahme bei, dass Querschnitte senkrecht zur Plattenmittelfläche bei der Verformung eben bleiben, ließ aber beliebige Verdrehungen der Querschnitte zu. Die Normalspannungen in Dickenrichtung werden vernachlässigt, die Querschubspannungen sind konstant über die Dicke verteilt.

Maguerrere und Wörnle [53] benutzten die gleiche Kinematik wie Hencky und erhielten auch eine über die Dicke konstante Querschubspannung, was die Randbedingungen auf den Deckflächen verletzt. Aus diesem Grunde wird im Elastizitätsgesetz für die Querkraft statt der Höhe  $h$  die Schubhöhe  $h_s$  benutzt.

Zur Berechnung von Schwingungen elastischer Platten leitete Mindlin [55] Plattengleichungen aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie her. Dafür entwickelte er die Verschiebungen in Potenzreihen bezüglich der Dickenkoordinate. Auch diese Theorie führt zu einer über die Dicke konstanten Querschubspannung

Reissner [62, 63, 64, 65] geht in seiner Theorie von kubisch über die Platte verteilten Biege- und Torsionsspannungen aus und erhält damit quadratisch über die Dicke verteilte Querschubspannungen.

Die häufigste Vorgehensweise bei der Entwicklung einer Plattentheorie ist die Reduktion des 3-D-Kontinuums um eine Dimension mit Hilfe ingenieurmäßiger Annahmen. Da gerade für den Porendruck die Art der zu treffenden Annahmen unklar ist und somit eine Fehlerquelle darstellt, wird für die Herleitung der poroelastischen Plattengleichungen ein anderer Weg gewählt. Dafür werden die Freiwerter in Potenzreihen entwickelt. Für elastische Platten wurden mit dieser Methode schon Plattentheorien hergeleitet und mit bestehenden Plattentheorien verglichen [45, 60].

Eine in der Akustik häufig verwendete Form der Modellierung poröser Materialien besteht darin, diese vereinfachend als Fluid mit frequenzabhängigen Materialdaten zu formulieren [3, 21]. Dabei geht man davon aus, dass das eigentlich zweiphasige Material aus Feststoffmatrix und Luft inkompressibel mo-

delliert werden kann, d.h. die einzelnen Bestandteile der Feststoffmatrix und der Luft werden als sehr viel steifer als das Skelett angesehen. Deshalb wird nur die strukturelle Kompressibilität des Skelettes zur Beschreibung der Wellenausbreitungsvorgänge genutzt. Voraussetzungen für diese Vereinfachungen sind stark unterschiedliche Kompressionsmoduli der einzelnen Konstituierenden des porösen Materials und der Struktur. Für Glaswolle z.B. trifft dies häufig zu, übliche Schaumstoffe dagegen können so nicht beschrieben werden [43].

Wenn die vereinfachende Modellierung als äquivalentes Fluid nicht zulässig ist, sollte das poröse Material als Zweiphasen-Kontinuum bestehend aus Feststoffmatrix und der durchströmenden Luft modelliert werden. Zur Beschreibung der Eigenschaften poroelastischer Materialien sind heutzutage zwei Theorien gebräuchlich, einmal die schon erwähnte Biotsche Theorie und die Theorie Poröser Medien, welche von de Boer und Ehlers entwickelt wurde. Detaillierte Informationen über die Theorie Poröser Medien können den Arbeiten von de Boer und Ehlers [27, 28, 25] entnommen werden. Da jedoch beide Theorien im linearen Fall, und nur dieser ist in der Akustik relevant, weitestgehend gleich sind [34, 69], wird in der vorliegenden Arbeit das poroelastische Material mit Hilfe der Biotschen Theorie formuliert.

Beide poroelastische Theorien basieren auf den Arbeiten von Fillunger und Terzaghi. Die ersten Arbeiten über poröse Medien, die sich mit dem Auftrieb in Talsperren auseinandersetzte, wurde von Fillunger im Jahr 1913 veröffentlicht [35]. Etwas später entwickelte Terzaghi [73] eine auf intuitiven Annahmen basierende Theorie über die Durchlässigkeit von Ton, welche noch heute in der Bodenmechanik Verwendung findet.

Aufbauend auf der Arbeit von Terzaghi entwickelte Biot ein theoretisches Modell zur Beschreibung des Verhaltens poröser Materialien [6]. In seinen folgenden Arbeiten formulierte Biot Theorien für anisotrope poroelastische Materialien [7] und für Poroviskoelastizität [8]. Außerdem erweiterte er seine Theorie auf dynamisches Verhalten, was in zwei getrennten Veröffentlichungen, einmal für niedrige Frequenzen [9] und einmal für hohe Frequenzen [10] dargestellt wurde. Weitere Modelle für die Frequenzabhängigkeit der Poroelastizität sind unter anderem von Johnson, Koplik und Dashen [42] (auch als JKD-Modell bezeichnet), Pride, Morgan und Gangi [61] sowie Bonnet und Auriault [15] entwickelt worden.

Biot setzte in [6, 7, 9, 10, 8] ein voll gesättigtes Medium voraus. Seine Theorie wurde von Vardoulakis und Beskos auf ein teilgesättigtes Medium erweitert [72].

Die Theorie Poröser Medien (TPM) basiert auf der Arbeit von Fillunger. Hierfür wurde die Mischungstheorie [71, 16] um die Theorie über Volumenanteile durch Bowen erweitert [17, 18]. Die Forschungsgruppe von Ehlers [26, 31, 33, 32, 30] setzte diese Arbeiten fort und entwickelte daraus die TPM, eine Theorie für nicht miteinander mischbare, sich überlagernde Kontinua, die miteinander in Wechselwirkung stehen.

In einigen Arbeiten von Bowen [18], Ehlers und Kubik [34], und Schanz und Diebels [69, 37] werden die Theorie poröser Medien und die Biotsche Theorie miteinander verglichen. Für den inkompressiblen Fall liefern beide Theorien gleiche Ergebnisse, für den kompressiblen Fall zeigen die Ergebnisse beider Theorien Abweichungen.

Zur numerischen Modellierung der Platte wird die FEM benutzt, die aufgrund ihrer Vielseitigkeit und ihrer gründlichen mathematischen Fundierung, das in der dynamischen Strukturanalyse am weitesten verbreitete Näherungsverfahren ist [5, 76]. Auch zur numerischen Modellierung poroelastischer Materialien wird die FEM häufig benutzt, z.B. in den Arbeiten von Lewis und Schrefler [51], die verschiedene FE-Modelle verwendeten, um Konsolidationsprozesse zu modellieren. Zienkiewicz [74, 75] entwickelte ein vereinfachtes Modell für die Anwendung der poroelastodynamischen FEM im Zeitbereich. In vielen Arbeiten wurde für das poroelastische Materialgesetz eine Verschiebungsformulierung benutzt, die mit

den Freiheitsgraden Festkörper- und Fluidverschiebung formuliert wird [43, 24, 58]. Dabei wird das eigentlich skalare Feld zur Beschreibung des Fluids mit Hilfe eines Vektorfeldes dargestellt. Im Fall einer dreidimensionalen Formulierung werden dafür sechs Freiheitsgrade benötigt, was einen hohen Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit zur Folge hat. Dies kann reduziert werden, wenn beachtet wird, dass zur vollständigen Beschreibung eines poroelastischen Materials der Porendruck als skalare Größe für das Fluid und die Festkörperverschiebung ausreichen [14]. Dies wurde von Göransson [38] umgesetzt, wobei in dieser Formulierung im Zeitbereich die auch in der Bodenmechanik übliche Vernachlässigung der Fluidträgheit [74] benutzt wurde. Dies ist jedoch unnötig, da in der Akustik die Berechnungen hauptsächlich im Frequenzbereich durchgeführt werden und dort eine vollständige Formulierung einfach umgesetzt werden kann. Dies wurde in verschiedenen Arbeiten von Atalla und Panneton publiziert [57, 58, 59].

Bei dicken poroelastischen Platten ist genauso wie bei elastischen schubweichen Platten auf eine Vermeidung des *shear-lockings* zu achten. Hierfür wurden von Bathe [5] bzw. Bischoff und Bletzinger [13] effiziente Elemente entwickelt.

In früheren Arbeiten wurde die entwickelte poroelastische Plattentheorie vereinfachend als poroelastische Mindlin-Theorie bezeichnet [19, 68, 20]. In dieser Arbeit werden allerdings mit Hilfe der Reihenentwicklung unterschiedliche Plattentheorien hergeleitet, die teilweise auf die üblichen in der Ingenieurwissenschaft gebräuchlichen Theorien führen und nicht exakt der Mindlin-Theorie entsprechen.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Diese Arbeit dient als Basis für die Entwicklung einer Theorie und eines Berechnungsverfahrens für die Schalltransmission durch poroelastische Platten, womit der Schalldurchgang durch poroelastische Platten realitätsnah abgebildet wird. Dazu muss die poröse Struktur in geeigneter Weise erfasst und zur numerischen Berechnung als ebenes Flächentragwerk aufbereitet werden. Deshalb werden hier mehrere Möglichkeiten der Herleitung von Theorien für das Verhalten poröser Platten untersucht und die daraus resultierenden Theorien miteinander verglichen.

Damit eine mathematische Formulierung des Problems gefunden werden kann, muss ein geeignetes Modell entwickelt werden. In Kapitel 2 wird die Biotsche Theorie, mit deren Hilfe die poröse Struktur simuliert wird, vorgestellt. Dabei wird auch auf die frequenzabhängige Formulierung poroelastischer Materialien eingegangen.

Die vorliegende Formulierung für ein dreidimensionales poroelastische Kontinuum soll in eine zweidimensionale Formulierung überführt werden. Deshalb werden in Kapitel 3 die gebräuchlichen Theorien für elastische Platten wiederholt und ihre Hintergründe dargestellt.

Die Herleitung poroelastischer Plattentheorien im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgt in Kapitel 4 mit Hilfe einer Reihenentwicklung bezüglich der Dickenkoordinate, welche in Kapitel 4.1 anhand einer elastischen Struktur erklärt wird. Je nach Wahl des Abbruchpunktes der Reihe entstehen Theorien unterschiedlicher Ordnung. Außerdem gibt es unterschiedliche Vorgehensweisen bei der Auswahl des Abbruchpunktes, auf die eingegangen wird. Einerseits kann die Reihe nach einer bestimmten Ordnung der Freiwerte abgebrochen werden, andererseits besteht die Möglichkeit die Reihenentwicklung nach einer bestimmten Potenz der Plattendicke abubrechen. Weiterhin wird kurz die Herleitung von Scheibentheorien erklärt.

In Kapitel 4.2 werden die in Kapitel 4.1 gewonnenen Erkenntnisse auf eine poroelastische Struktur übertragen. Neben der Reihenentwicklung für die bekannten Plattenfreiwerte wird nun auch der Porendruck



in eine Potenzreihe bezüglich der Dickenkoordinate entwickelt.

Die Überführung der hergeleiteten poroelastischen Plattengleichungen in eine Finite-Element-Formulierung erfolgt in Kapitel 5. Sofern die Plattentheorie Schubterme enthält, muss dabei die Möglichkeit des *shear lockings* in Betracht gezogen werden. Deshalb wird in Kapitel 5.4 auf die Vermeidung des *shear lockings* mit Hilfe lockingfreier Elemente eingegangen. Es werden die für die Theorien unterschiedlicher Ordnung notwendigen FE-Formulierungen vorgestellt.

In Kapitel 6 erfolgt der Anwendung der entwickelten Berechnungsmethode auf verschiedene Beispiele. Die Plattentheorien unterschiedlicher Ordnung werden miteinander verglichen und anhand von Berechnungen des Verhaltens einer Felsplatte verifiziert. Außerdem wird das Verhalten von einigen Schäumen untersucht.

## 2 Biot'sche Theorie

In dieser Arbeit wird das Verhalten eines porösen Materials mit Hilfe der Biotschen Theorie beschrieben. Um ein poröses Material zu modellieren, müssen im allgemeinen vereinfachende Annahmen getroffen werden. Poroelastische Materialien können zweiphasige Materialien bestehend aus einer Festkörperphase und einer Fluidphase sein. Als wesentliche Vereinfachung wird angenommen, dass es sich bei der festen Komponente um ein linear-elastisches Material handelt und dass die Poren vollständig mit einem Fluid gefüllt sind. Betrachtet wird also ein elastisches Festkörperskelett mit untereinander verbundenen, zufällig verteilten Poren [7], die ein viskoses Fluid enthalten, wie in Abbildung 2.1 dargestellt.

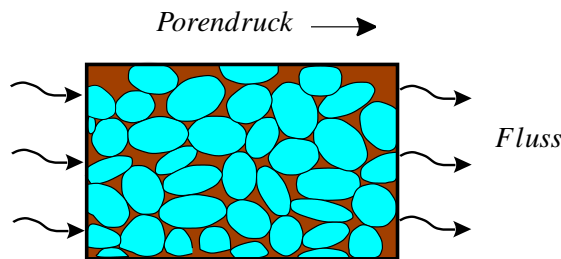


Abbildung 2.1: Poroelastisches Material

Die Porosität wird mit

$$\phi = \frac{V^f}{V} \quad (2.1)$$

angegeben, wobei  $V^f$  das Volumen der miteinander verbundenen offenen Poren angibt, während die versiegelten Poren im Volumen des Festkörperskelettes  $V^s$  erfasst werden. Das Material ist vollständig gesättigt. Das Gesamtvolumen des Materials kann mit  $V = V^f + V^s$  angegeben werden, es setzt sich also aus dem Volumen des Festkörperskelettes  $V^s$  und dem Volumen des Porenfluids  $V^f$  zusammen, so dass ein zweiphasiges Material vorliegt.

### 2.1 Stoffgesetz und Kinematik

Das Stoffgesetz kann in zwei Gleichungen für die Spannungen im Festkörperskelett  $\sigma^s$  und die Spannungen im Fluid  $\sigma^f$  unterteilt werden [67]

$$\sigma_{ij}^s = 2G\epsilon_{ij}^s + \left( \frac{2G\nu}{1-2\nu} + \frac{Q^2}{R} \right) \epsilon_{kk}^s \delta_{ij} + Q\epsilon_{kk}^f \delta_{ij} \quad (2.2a)$$

$$\sigma^f = -\phi p = Q\epsilon_{kk}^s + R\epsilon_{kk}^f. \quad (2.2b)$$

Es basiert auf der Annahme von linearen Zusammenhängen zwischen den Spannungen und Dehnungen sowohl im Festkörperskelett als auch im Fluid. Es wird also ein elastisches, isotropes Materialverhalten vorausgesetzt.

Die zu den Spannungen  $\sigma^s$  und  $\sigma^f$  korrespondierenden Dehnungen werden mit  $\epsilon^s$  und  $\epsilon^f$  bezeichnet, welche durch die kinematische Gleichungen

$$\epsilon_{ij}^s = \frac{1}{2} (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s) \quad \epsilon_{kk}^f = u_{k,k}^f \quad (2.3)$$

definiert werden. Zwischen den Festkörper-/Fluidverschiebungen  $u^s/u^f$  und den dazugehörigen Dehnungen wird ein linearer Zusammenhang angenommen.

Außerdem wird reversible Materialverformung angenommen, d.h. es kommt zu keiner bleibenden Verformung während eines Belastungszyklusses. Das Material des Festkörperskelettes wird als homogen und isotrop angenommen und durch das Schubmodul  $G$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  als Materialkennwerte beschrieben. Die Parameter  $Q$  und  $R$  beschreiben die Wechselwirkung zwischen dem Festkörperskelett und dem Porenfluid. Da bei der Betrachtung am differentiellen Element Zugspannungen mit positivem Vorzeichen angesetzt werden, der Druck jedoch immer normal in Richtung auf die Elementoberfläche angesetzt wird, ist ein negatives Vorzeichen für den Druck nötig. Der Porendruck  $p$  in (2.2b) wird deshalb als negativer hydrostatischer Druck angegeben.

Eine andere Möglichkeit, das Stoffgesetz darzustellen, wird in einer von Biots früheren Arbeiten beschrieben [6]

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij}^s + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk}^s \delta_{ij} - \alpha \delta_{ij} p \quad (2.4a)$$

$$\zeta = \alpha \epsilon_{kk}^s + \frac{\phi^2}{R} p. \quad (2.4b)$$

Der Vorteil dieser Formulierung ist, dass aus ihr ein Differentialgleichungssystem für ein poroelastisches 3-D-Kontinuum abgeleitet werden kann, in dem anstatt der sechs Verschiebungskomponenten der Porendruck  $p$  und die drei Festkörpersverschiebungen  $u^s$  die Freiwerte darstellen. Das Problem wird also mit vier unabhängigen Variablen und entsprechend vier Gleichungen beschrieben, womit eine Verminderung des numerischen Aufwandes verbunden ist.

Gleichung (2.4a) steht für die totale Spannung  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^f$ , welche sich aus der Spannung im Festkörperskelett und der Spannung im Fluid zusammensetzt. Der letzte Term der Gleichung beschreibt das Verhalten des Porenfluids mit dem Porendruck  $p$  und dem Biotschen Spannungskoeffizienten  $\alpha = \phi(1 + \frac{Q}{R})$ .

Ohne den Porendruck vereinfacht sich Gleichung (2.4a) zum linear-elastischen Stoffgesetz. Wie bei einem isotropen elastischen Material können auch für ein isotropes poroelastisches Material der Spannungs- und der Verzerrungstensor in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil unterteilt werden, wobei der deviatorische Anteil rein elastisch ist.

Neben der Gleichung für die totale Spannung beinhaltet das Stoffgesetz eine zweite Gleichung, in der die Variation des Fluidvolumens über ein Referenzvolumen  $\zeta$  beschrieben wird (2.4b). Der darin enthaltene Parameter  $R$ , der Parameter  $Q$  und der schon in der ersten Gleichung verwendete Biotsche Spannungskoeffizient  $\alpha$ , können folgendermaßen berechnet werden

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K^s} \quad (2.5a)$$

$$R = \frac{\phi^2 K^f K^{s2}}{K^f (K^s - K) + \phi K^s (K^s - K^f)} \quad (2.5b)$$

$$Q = \frac{\phi (\alpha - \phi) K^f K^{s2}}{K^f (K^s - K) + \phi K^s (K^s - K^f)} , \quad (2.5c)$$

wobei  $K^s$  das Kompressionsmodul des Festkörperskelettes,  $K^f$  das Kompressionsmodul des Fluids und  $K$  das Kompressionsmodul des Gesamtmaterials ist.

Die Größe  $\zeta$  wird durch die Kontinuitätsgleichung definiert

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = 0 . \quad (2.6)$$

$q_i = \phi \frac{\partial v_i}{\partial t}$  stellt den spezifischen Fluss dar, wobei  $v_i = u_i^f - u_i^s$  die Relativverschiebung der Festkörperphase zur Fluidphase beschreibt.

## 2.2 Bewegungsgleichungen

Nachdem im vorigen Abschnitt das Stoffgesetz und die kinematischen Zusammenhänge vorgestellt wurden, müssen nun noch die Bewegungsgleichungen hinzugefügt werden.

Die Impulsbilanz für das Gesamtmaterial kann mit der folgenden Gleichung ausgedrückt werden

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i^s + \phi \rho_f \ddot{v}_i , \quad (2.7)$$

wobei  $\mathbf{F}$  eine Kraft pro Volumeneinheit darstellt, die aber in den nachfolgenden Formulierungen vernachlässigt wird.  $\rho = \rho_s(1 - \phi) + \phi \rho_f$  ist die Gesamtdichte, die aus der Dichte des Festkörperskelettes  $\rho_s$  und der Dichte des Fluids  $\rho_f$  berechnet wird. Die Fluidbilanz wird mit Hilfe eines modifizierten Gesetzes von Darcy beschrieben

$$q_i = -\kappa \left( p_{,i} + \rho_f \ddot{u}_i^s + \frac{\rho_a + \phi \rho_f}{\phi} \ddot{v}_i \right) . \quad (2.8)$$

$\kappa$  gibt die Permeabilität des Materials an. Um die dynamischen Wechselwirkungen zwischen Festkörperskelett und Porenfluid zu beschreiben, führte Biot die “apparent mass density”  $\rho_a = C \phi \rho_f$  ein [9]. Der Faktor  $C$  ist von der Porengeometrie und der Erregerfrequenz abhängig. Zur Vereinfachung wird  $C$  hier als frequenzunabhängig mit  $C = 0.66$  angenommen. Dieser Wert wurde von Bonnet und Auriault für den niederfrequenten Bereich gemessen [15].

Um die endgültigen Bewegungsgleichungen zu erhalten, müssen das Stoffgesetz und die Impulsbilanz umgeformt und ineinander eingesetzt werden. Als erstes werden die Gleichungen in den Frequenzbereich

transformiert. Geht man davon aus, dass Anregung und Schwingung des poroelastischen Materials einem harmonischen Zeitverlauf folgen, erhält man

$$\begin{aligned} u_i^s(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}_i^s(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \\ v_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{v}_i(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \\ p(\mathbf{x}, t) &= \hat{p}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

wobei  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit ist,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\mathbf{x}$  der räumliche Koordinatenvektor. Die mit  $(\hat{\phantom{x}})$  gekennzeichneten Größen stellen die jeweilige Amplitude dar. Da nur  $u_i^s$  und  $p$  als Freiheitsgrade erwünscht sind, muss die Variable  $v_i$  eliminiert werden. Dafür wird das Gesetz von Darcy entsprechend umgestellt

$$\hat{v}_i = - \underbrace{\frac{\kappa \rho_f \phi^2 \omega^2}{-\phi^2 i \omega + \omega^2 \kappa (\rho_a + \phi \rho_f)}}_{\beta} \frac{1}{\omega^2 \phi \rho_f} (\hat{p}_{,i} - \omega^2 \rho_f \hat{u}_i^s). \quad (2.9)$$

Die endgültigen Differentialgleichungen für die Verschiebung  $\hat{u}_i^s$  und den Porendruck  $\hat{p}$  entstehen durch Einsetzen des Stoffgesetzes (2.2) in die in den Frequenzbereich transformierte Impulsbilanz (2.7) und die Kontinuitätsgleichung (2.4b) unter Verwendung von  $\hat{v}_i$  aus Gleichung (2.9)

$$G \hat{u}_{i,jj}^s + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \hat{u}_{j,ij}^s - (\alpha - \beta) \hat{p}_{,i} + \omega^2 (\rho - \beta \rho_f) \hat{u}_i^s = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{\beta}{i\omega \rho_f} \hat{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 i \omega}{R} \hat{p} - (\alpha - \beta) i \omega \hat{u}_{i,i}^s = 0. \quad (2.10b)$$

Die Größe  $\beta$  wurde in (2.9) definiert. Eine analytische Darstellung dieses Differentialgleichungssystems ist im Zeitbereich nur für  $\kappa \rightarrow \infty$  möglich, was Reibungsfreiheit zwischen Festkörperskelett und Fluid bedeuten würde. Dies stellt hier allerdings kein Problem dar, weil im folgenden nur eine Darstellung im Frequenzbereich nötig ist.

Da am weiteren Verlauf dieser Arbeit nur noch die Festkörperverschiebung im Frequenzbereich verwendet wird, kann auf eine genauere Kennzeichnung derselben verzichtet werden, d.h.  $\hat{u}_i^s = u_i$ .

Um eine eindeutige Lösung des Differentialgleichungssystems (2.9) zu bestimmen, müssen geeignete Randbedingungen gewählt werden. Randbedingungen können in DIRICHLETSche und NEUMANNsche Randbedingungen eingeteilt werden. Für ein poroelastisches Kontinuum sind sowohl Randbedingungen für das poröse Festkörperskelett als auch für das Porenfluid notwendig. Eine DIRICHLETSche Randbedingung für ein poroelastisches Kontinuum besteht aus einer vorgeschriebenen Festkörperverschiebung  $u_i^s$  und einem vorgeschriebenen Porendruck  $p$ . Durch eine NEUMANNsche Randbedingung werden eine Spannung  $t_i = \sigma_{ijn} n_j$  sowie der Normalenfluss  $q_n = q_i n_i$  vorgegeben. Diese Bedingungen können auch zu gemischten Randbedingungen kombiniert werden. Liegen allerdings nur NEUMANNsche Randbedingungen vor, ist das Problem lösbar, wenn die Starrkörperbewegungen und ein konstanter Fluidruck korrekt behandelt werden [22].

## 2.3 Frequenzabhängige Formulierung

Die Materialparameter für die Biot'sche Theorie sind nur im niederfrequenten Bereich frequenzunabhängig [56]. Biot führte deswegen getrennte Betrachtungen für den Einfluss der Dynamik im niederfrequenten

ten [9] und im höherfrequenten [10] Bereich durch. Die Formulierung eines frequenzabhängigen poroelastischen Materialgesetzes erfolgt mit Hilfe einer frequenzabhängigen Permeabilität. Entscheidend bei der frequenzabhängigen Modellierung der Permeabilität ist die Verknüpfung des niederfrequenten mit dem hochfrequenten Bereich. Im niederfrequenten Bereich wird der Fluss des Porenfluids von der Viskosität, d.h. vom Realteil der Permeabilität dominiert. Im höherfrequenten Bereich dominiert der Einfluss des Imaginärteils der Permeabilität. Der Übergang zwischen beiden Bereichen wird durch die charakteristische Frequenz  $\omega_c$ , die auch als *rollover frequency*  $\omega_0$  bezeichnet wird, beschrieben. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die charakteristische Frequenz zu ermitteln. In der vorliegenden Arbeit wird die *rollover frequency* aus dem JKD-Modell benutzt. In der dem JKD-Modell zugrunde liegenden Arbeit von Johnson, Koplik und Dashen [42] wird das Verhalten eines porösen vollsaturierten Mediums unter Einwirkung eines harmonischen Druckgradienten untersucht. Die dynamische Durchlässigkeit und die dynamische Tortuosität können als Funktion der Frequenz  $\omega$  dargestellt werden. Dafür wird die Annahme getroffen, dass ein homogenes, isotropes poröses Material mit der Porosität  $\phi$  vorliegt.

Die *rollover frequency* kann durch die Gleichung

$$\omega_0 = \frac{\eta\phi}{\rho_f \alpha_\infty k_0} \quad (2.11)$$

ermittelt werden, mit der hydraulischen Viskosität

$$\eta = \nu \rho_f, \quad (2.12)$$

der intrinsischen Permeabilität

$$k_0 = \kappa \eta \quad (2.13)$$

und der Tortuosität  $\alpha_\infty$ , welche die Verwindung der Porenkanäle beschreibt.

Die frequenzabhängige intrinsische Permeabilität kann mit Hilfe der Gleichung

$$k(\omega) = \frac{k_0}{\left[1 + iP \frac{\omega}{\omega_0}\right]^{\frac{1}{2}} + i \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (2.14)$$

ermittelt werden mit dem Parameter  $P$

$$P = \frac{4\alpha_\infty k_0}{\Lambda^2 \phi}. \quad (2.15)$$

$\Lambda$  stellt die viskose charakteristische Länge dar.

Als Kennwerte für Dämmstoffe liegen häufig die Dichte  $\rho$ , die Dichte des Porenfluids  $\rho_f$ , das Elastizitätsmodul  $E$ , die Querkontraktionszahl  $\nu$ , die Tortuosität  $\alpha_\infty$ , die Porosität  $\phi$ , der Strömungswiderstand  $\sigma_w$  und die viskose charakteristische Länge  $\Lambda$  vor. Die Permeabilität  $\kappa$  kann mit Hilfe der Gleichung

$$\kappa(\omega) = \frac{1}{\sigma_w \sqrt{1 + \frac{4\alpha_\infty^2 \eta_f \rho_f i \omega}{\sigma_w^2 \Lambda^2 \phi^2}} + i \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (2.16)$$

ermittelt werden [3]. Somit erhält man eine frequenzabhängige Permeabilität  $\kappa$ . Im niederfrequenten Bereich ist der Einfluss des Imaginärteils relativ gering. Mit ansteigender Frequenz steigt der Wert des Imaginärteils gegenüber dem Realteil an und hat somit einen größeren Einfluss auf die Permeabilität (siehe Abbildung 2.2 und 2.3). Da das Kompressionsmodul von Luft, was hier als Porenfluid vorliegt, bekannt ist, können die Parameter  $\alpha$  und  $R$  mit Hilfe der Gleichungen (2.5a) und (2.5b) berechnet werden.

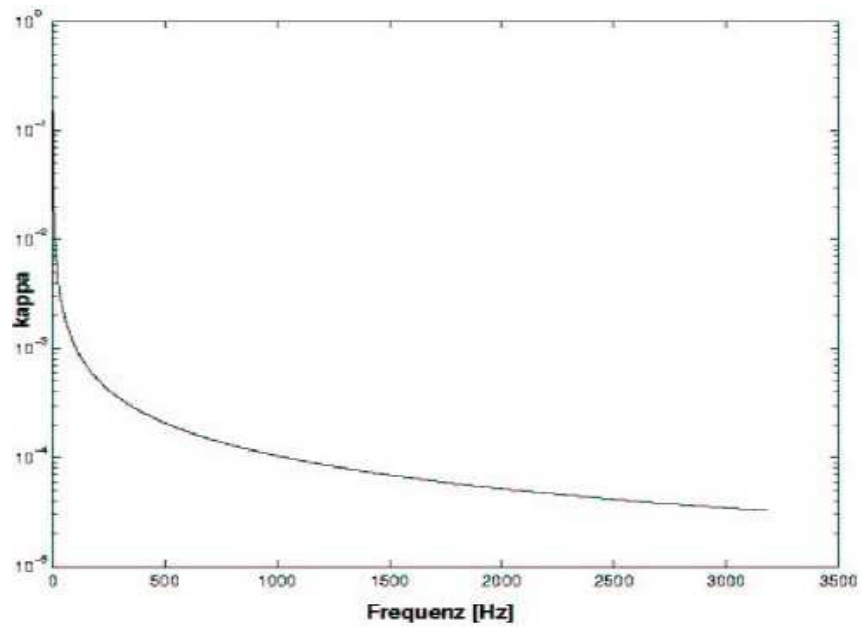


Abbildung 2.2: Realteil der Permeabilität

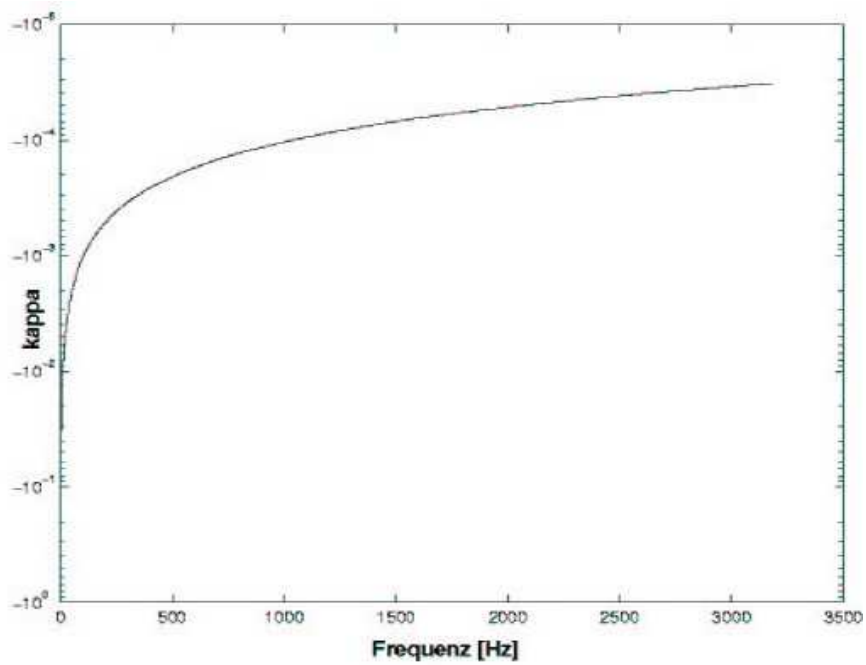


Abbildung 2.3: Imaginärteil der Permeabilität

## 3 Plattentheorie

Platten sind ebene Flächentragwerke, die durch Kräfte senkrecht zur Mittelfläche belastet werden. Wird ein ebenes Flächentragwerk dagegen durch Kräfte parallel zur Mittelfläche belastet, spricht man von einer Scheibe. Plattentheorien beschreiben räumliche Spannungs- und Verzerrungszustände durch Größen, die auf der Plattenmittelfläche definiert sind, wofür im Voraus ingenieurmäßige Annahmen getroffen werden müssen. Bevor hier eine poroelastische Plattentheorie hergeleitet wird, werden einige elastische Plattentheorien kurz dargestellt. Dabei wird sich auf Plattenformulierungen in kartesischen Koordinaten beschränkt (siehe Abb.3.1).

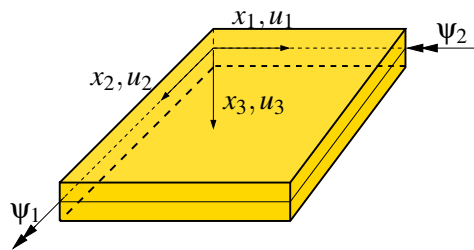


Abbildung 3.1: Koordinaten, Verschiebungen und Verdrehungen einer Rechteckplatte

### 3.1 Klassische Plattentheorie

Die klassische Plattentheorie wurde 1850 von Kirchhoff hergeleitet [47]. Für die Anwendung dieser Plattentheorie muss eine dünne Platte vorausgesetzt werden.

Für die Herleitung der Plattengleichungen gelten folgende Annahmen:

- Der Werkstoff der Platte ist homogen und isotrop. Es gilt das verallgemeinerte Hookesche Gesetz.
- Die Plattenmittelfläche ist bei der Biegeverformung neutrale Ebene. Die Punkte der Plattenmittelfläche erfahren die Verschiebungen  $u_1(x_1, x_2, 0) = 0$ ,  $u_2(x_1, x_2, 0) = 0$ ,  $u_3(x_1, x_2, 0) \neq 0$ . Die Durchbiegung ist klein im Vergleich zur Plattendicke und die Krümmungen der Biegefläche werden linearisiert  $\kappa_{11} \approx -u_{3,11}$ ,  $\kappa_{22} \approx -u_{3,22}$ ,  $\kappa_{12} \approx -u_{3,12}$ .
- Die Punkte auf der Normalen zur Mittelfläche ändern bei der Verformung ihre gegenseitigen Abstände auf der Normalen nicht, d.h. die Platte ist in Dickenrichtung dehnstarr (erste Bernoulli-Hypothese).



- Alle Punkte auf der Normalen zur unverformten Mittelfläche sind auch Punkte der Normalen zur verformten Mittelfläche (zweite Bernoulli-Hypothese auch Kirchhoffsche Normalenhypothese genannt) [4].

Die kinematischen Hypothesen führen auf die Verschiebungsgleichungen

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \psi_1(x_1, x_2) x_3 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \psi_2(x_1, x_2) x_3 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\psi_1$  und  $\psi_2$  sind die Drehwinkel der Plattenquerschnitte um die  $x_2$ - bzw.  $x_1$ -Achse (siehe Abb. 3.1, 3.2). Aus den Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen für kleine Verschiebungsgradienten

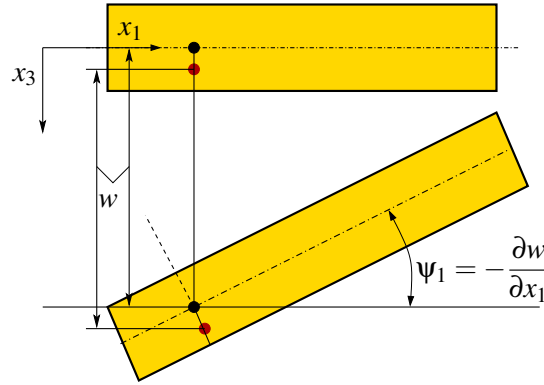


Abbildung 3.2: Kinematische Beziehungen am Kirchhoffplattenelement

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_{1,1}, \quad \epsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \epsilon_{33} = u_{3,3} \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}), \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

wird ersichtlich, dass  $\epsilon_{33} = 0$  ist und die Schubverzerrungen  $\epsilon_{13}, \epsilon_{23}$  von  $x_3$  unabhängige Größen sind. Aus der Kirchhoffschen Normalenhypothese folgt, dass die Schubverformungen  $\epsilon_{13}$  und  $\epsilon_{23}$  vernachlässigt werden können

$$\begin{aligned} \epsilon_{13} &= \frac{1}{2}(u_{1,3} + w_{,1}) = 0 \quad \longrightarrow \quad u_{1,3} = -w_{,1} \\ \epsilon_{23} &= \frac{1}{2}(u_{2,3} + w_{,2}) = 0 \quad \longrightarrow \quad u_{2,3} = -w_{,2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aufgrund der ersten Bernoulli-Hypothese ergibt sich, dass  $u_{1,3}$  bzw.  $u_{2,3}$  über die Plattendicke konstant sind und die Verdrehwinkel können als Ableitungen der Durchbiegung  $w$  berechnet werden [48]

$$\begin{aligned} \psi_1 &= u_{1,3} = -w_{,1} \\ \psi_2 &= u_{2,3} = -w_{,2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Damit ergeben sich aus Gleichung (3.1) folgende Verschiebungsgleichungen

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\partial w}{\partial x_1} x_3 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\partial w}{\partial x_2} x_3 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Normalspannung  $\sigma_{33}$  ist im allgemeinen viel kleiner als die Normalspannungen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$ . In der klassischen Plattentheorie gilt deshalb die Annahme  $\sigma_{33} \approx 0$  (statische Hypothese). Allerdings sind die statische Hypothese und die kinematische Hypothese  $\epsilon_{33} = 0$ , die sich aus (3.2) ergibt, im Rahmen der Elastizitätstheorie unverträglich. Bei dünnen Platten kann dieser Widerspruch ohne größere Fehler für die Tragwerksanalyse in Kauf genommen werden.

Die Schubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  müssen aus Gleichgewichtsgründen bei der Platte von Null verschiedene Werte haben. Wegen der kinematischen Hypothese  $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$  ist dies nur für ein Schubmodul  $G \rightarrow \infty$ , d.h. für eine schubstarre Platte, möglich. Aus den statischen und kinematischen Hypothesen folgt, dass für die klassische Plattentheorie ein ebener Spannungszustand angenommen wird. Ein Elastizitätsgesetz gibt es deshalb nur für die Spannungen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{12}$ . Die Schubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  werden allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet. Die Spannungen  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  und  $\sigma_{33}$  liefern keinen Anteil zur Formänderungsenergie einer schubstarken Platte.

Die Spannungen werden durch Integration über die Plattendicke  $h$  zu auf die Schnittlänge bezogenen Schnittgrößen zusammengefasst, deren Ergebnis Biegemomente, Torsionsmomente und Querkräfte sind

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\alpha} x_3 dx_3 &= m_{\alpha\alpha}(x_1, x_2) && \text{Biegemomente} \\ \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 &= m_{\alpha\beta}(x_1, x_2) && \text{Torsionsmomente} \\ \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 &= q_\alpha(x_1, x_2) && \text{Querkräfte} \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Die Gleichgewichtsbedingungen an einem Plattenelement lauten in den Schnittgrößen

$$\begin{aligned} q_{1,1} + q_{2,2} + q &= 0 \\ m_{11,1} + m_{21,2} - m_1 &= 0 \\ m_{22,2} + m_{12,1} - m_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die anschauliche Deutung der Schnittgrößen kann Abbildung 3.3 entnommen werden. Die äußere Belastung, wird durch äußere Kräfte  $q$ , sowie durch äußere Momente  $m_1$  und  $m_2$  beschrieben. Die Größen  $q_1$  und  $q_2$  stellen Querkräfte dar,  $m_{11}$  und  $m_{22}$  werden als Biegemomente bezeichnet,  $m_{12}$  steht für das Drillmoment.

Aus den Gleichungen (3.7) können die Querkräfte eliminiert werden. Nach Differentiation der beiden Momentengleichungen und unter Betrachtung von  $m_{12} = m_{21}$  erhält man

$$m_{11,11} + m_{12,12} + m_{22,22} = -q. \quad (3.8)$$

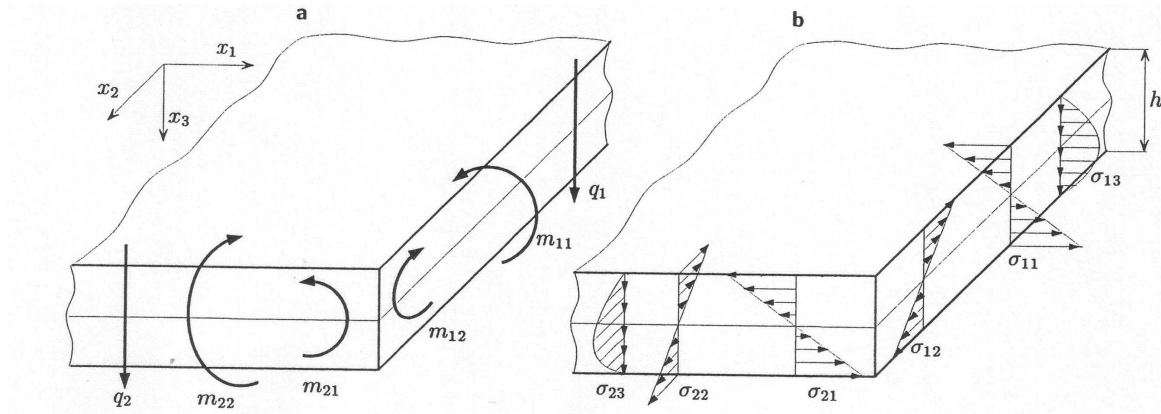


Abbildung 3.3: Schnittgrößen und Spannungen am Plattenelement

Es handelt sich dabei um eine statisch unbestimmte Gleichung für die drei unbekannten Schnittmomente  $m_{11}$ ,  $m_{22}$  und  $m_{12}$ . Den Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verschiebung liefert das verallgemeinerte Hookesche Gesetz für ebene Spannungszustände

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \quad \longrightarrow \quad \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}) \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \quad \longrightarrow \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}) \\ \epsilon_{12} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{12} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{12},\end{aligned}\tag{3.9}$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querkontraktionszahl ist. Ersetzt man die Verzerrungen durch die Ableitungen der Durchbiegung  $w(x_1, x_2)$ , können die Spannungen als Funktion von  $w(x_1, x_2)$  ausgedrückt werden. Durch Einsetzen des von  $w(x_1, x_2)$  abhängigen Stoffgesetzes in die Gleichungen (3.6) ergeben sich die Stoffgleichungen für die Schnittmomente

$$\begin{aligned}m_{11}(x_1, x_2) &= -B(w_{,11} + \nu w_{,22}) \\ m_{22}(x_1, x_2) &= -B(w_{,22} + \nu w_{,11}) \\ m_{12}(x_1, x_2) &= -B(1 - \nu)w_{,12}\end{aligned}\tag{3.10}$$

mit der Plattensteifigkeit  $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Da die Schubverzerrungen in Dickenrichtung verschwinden, existiert kein Elastizitätsgesetz für die Querkkräfte. Sie werden allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet.

Aus den Gleichungen (3.8) und (3.10) wird die Gleichung für die Durchbiegung der Plattenmittelfläche ermittelt

$$B\Delta\Delta w = p.\tag{3.11}$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine Differentialgleichung vierter Ordnung. Als kinematische Randgrößen einer Platte können die Durchbiegung und die Verdrehung des Plattenrandes, als statische Randgrößen das Biegemoment, das Torsionsmoment und die Querkraft vorgegeben werden. Bei der Formulierung der statischen Randbedingungen kommt es nun zu Problemen. Da das mathematische Plattenmodell, durch die der Kirchhoffschen Theorie zugrunde liegenden Hypothesen vereinfacht wurde, wird das Problem auf ein lineares Randwertproblem vierter Ordnung reduziert. Für partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung können pro Rand immer nur zwei Randbedingungen vorgegeben werden, auch wenn für den Plattenrand drei Schnittgrößen definiert sind.

Man kann dieses Problem umgehen, indem man das Torsionsmoment und die Querkraft am Rand zu einer Ersatzquerkraft zusammenfasst. Außerdem kann sich an den Ecken eine Singularität ergeben. Trotzdem liefert diese Theorie in den meisten Fällen gute Ergebnisse. Erst für dicke Platten oder Platten aus schubweichen Materialien sind andere Theorien notwendig.

## 3.2 Erweiterte Plattentheorien

Die klassische Plattentheorie, die dem Modell der schubstarrten Platte mit kleinen Durchbiegungen entspricht, hat sich für hinreichend dünne Platten bewährt. Auch für Platten mittlerer Dicke kann, falls die Durchbiegungen auch weiterhin klein bleiben, ein zweidimensionales, lineares Plattenmodell Grundlage einer Strukturanalyse sein. Mit zunehmender Dicke  $h$  nimmt der Einfluss der Schubverformungen in Querrichtung zu. In der neueren Literatur werden erweiterte Plattentheorien oft klassifiziert in eine Schubdeformationstheorie erster Ordnung und Schubdeformationstheorien höherer Ordnung. Die größte Bedeutung für Ingenieur Anwendungen hat die Schubdeformationstheorie erster Ordnung, die auch als Mindlinsche Plattentheorie bezeichnet wird und das Verhalten schubelastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen beschreibt. Für diese Theorie gelten folgende Annahmen:

- Der Werkstoff der Platte ist homogen und isotrop. Es gilt das verallgemeinerte Hookesche Gesetz.
- Die Plattenmittelfläche ist bei der Biegeverformung neutrale Ebene. Die Punkte der Plattenmittelfläche erfahren die Verschiebungen  $u_1(x_1, x_2, 0) = 0$ ,  $u_2(x_1, x_2, 0) = 0$ ,  $w(x_1, x_2, 0) \neq 0$ . Die Durchbiegung ist klein im Vergleich zur Plattenmittelfläche und die Krümmungen der Biegefläche werden linearisiert  $\kappa_{11} \approx \psi_{1,1}$ ,  $\kappa_{22} \approx \psi_{2,2}$ ,  $\kappa_{12} \approx \psi_{1,2} + \psi_{2,1}$ .
- Die Punkte auf der Normalen ändern bei der Verformung ihre gegenseitigen Abstände auf der Normalen nicht, d.h. die Platte ist in Dickenrichtung dehnstarr (erste Bernoulli-Hypothese).
- Die zweite Bernoulli Hypothese gilt hier nicht mehr.

Aus der ersten Bernoulli-Hypothese folgt wie schon bei der Kirchhoffschen Plattentheorie  $\epsilon_{33} = 0$ . Damit gilt für die schubelastische Platte die kinematische Hypothese

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \psi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \psi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(siehe Abbildung 3.4).

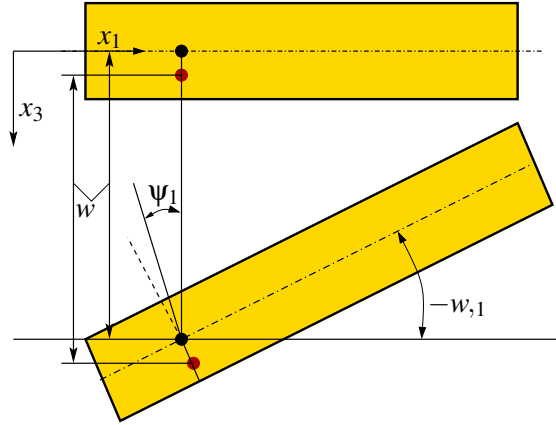


Abbildung 3.4: Kinematische Beziehungen am Plattenelement

Genau wie bei der Kirchhoffschen Plattentheorie ist auch hier die Normalspannung  $\sigma_{33}$  viel kleiner als die Normalspannungen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$ . Deshalb gilt auch hier die Annahme  $\sigma_{33} \approx 0$ . In der Elastizitätstheorie folgt aus dieser Annahme ein ebener Spannungszustand, aus der Annahme  $\epsilon_{33} = 0$  ein ebener Verzerrungszustand, was eigentlich gleichzeitig nicht möglich ist. Obwohl die Annahmen nicht widerspruchsfrei sind, führen sie in der Anwendung auf zuverlässige Strukturmodelle.

Für das Schubelastische Plattenmodell bleiben somit alle in Kapitel 3.1 formulierten Voraussetzungen des Schubstarren Modells bis auf die zweite Bernoulli Hypothese erhalten. Während beim Schubstarren Plattenmodell alle Verformungen durch eine Größe, nämlich die Durchbiegung  $w(x_1, x_2)$  ausgedrückt werden können, sind beim Schubelastischen Modell auch die Querschnittsdrehwinkel  $\psi_1(x_1, x_2)$  und  $\psi_2(x_1, x_2)$  unabhängige Größen. Man erkennt aus der weiteren Ableitung, dass daher auch für die Schubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  ein Elastizitätsgesetz formuliert werden muss.

Mit Hilfe der kinematischen Hypothese aus Gleichung (3.12) können die Beziehungen zwischen Verzerrungen und Verschiebungen hergeleitet werden

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= u_{1,1} = x_3 \psi_{1,1}, & \epsilon_{22} &= u_{2,2} = x_3 \psi_{2,2}, & \epsilon_{33} &= u_{3,3} = w_{,3} = 0 \\
 \epsilon_{12} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{x_3}{2}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) \\
 \epsilon_{13} &= \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}(\psi_1 + w_{,1}) \\
 \epsilon_{23} &= \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}(\psi_2 + w_{,2}) .
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind identisch mit denen der Schubstarren Platte. Es gelten somit die Gleichungen (3.7) und (3.8).

Mit  $\sigma_{33} = 0$  erhält man aus dem verallgemeinerte Hookeschen Gesetz

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \longrightarrow \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \longrightarrow \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G}\sigma_{12} \longrightarrow \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \\
 \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G}\sigma_{31} \longrightarrow \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31} \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G}\sigma_{23} \longrightarrow \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit dem Schubmodul  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Im Gegensatz zum Elastizitätsgesetz für die schubstarre Platte (3.9) beinhaltet dieses Elastizitätsgesetz auch Gleichungen für die Schubspannungen  $\sigma_{31}$  und  $\sigma_{23}$ . Diese Schubspannungen liefern also einen Beitrag zur Formänderungsenergie einer schubelastischen Platte. Setzt man die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (3.13) in die Gleichungen (3.14) ein, entsteht als Ergebnis das Elastizitätsgesetz für die schubelastische Platte

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2}(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2}) & \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)}(\psi_1 + w_{,1}) \\
 \sigma_{22} &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2}(\psi_{2,2} + \nu\psi_{1,1}) & \sigma_{23} &= \frac{E}{2(1+\nu)}(\psi_2 + w_{,2}) \\
 \sigma_{12} &= \frac{Ex_3}{2(1+\nu)}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Die Spannungen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{12}$  haben wie auch schon in der klassischen Plattentheorie einen linearen Verlauf über die Dicke  $h$ . Die Schubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  sind unabhängig von  $x_3$  und damit konstant über  $h$ . Dies verdeutlicht den Näherungscharakter des schubelastischen Plattenmodells, denn aus dem Gleichgewicht am differentiellen Element ergibt sich eigentlich ein parabolischer Verlauf der Schubspannungen (siehe Abbildung 3.3).

Formuliert man das Stoffgesetz für die Schnittgrößen, wird dieser Widerspruch verdeckt, da der Verlauf der Schubspannungen daraus nicht erkennbar ist

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= B(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2}) & m_{22} &= B(\psi_{2,2} + \nu\psi_{1,1}) & m_{12} &= \frac{1-\nu}{2}B(\psi_{1,2} + \nu\psi_{2,1}) \\
 q_1 &= Gh_s(\psi_1 + w_{,1}) & q_2 &= Gh_s(\psi_2 + w_{,2}),
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

wobei  $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  gilt. In den Gleichungen für  $q_1$  und  $q_2$  wird die wirkliche Plattendicke  $h$  durch eine reduzierte Schubdicke  $h_s$  ersetzt, um den Fehler der konstanten Schubspannungsverteilung über  $h$  zu korrigieren.

Für die Ableitung der Plattengleichungen ist es hilfreich, die folgenden Abkürzungen einzuführen

$$\Phi(x_1, x_2) = (\psi_{1,1} + \psi_{2,2}) \quad \Psi(x_1, x_2) = (\psi_{2,1} - \psi_{1,2}) . \quad (3.17)$$

Das Schubelastische Plattenmodell kann nun durch drei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, d.h. durch ein Problem sechster Ordnung vollständig beschrieben werden

$$B\Delta\Phi = -q \quad \Delta w = -\Phi + \frac{B}{Gh_s}\Delta\Phi \quad \frac{1-\nu}{2} \frac{B}{Gh_s}\Delta\Psi - \Psi = 0 . \quad (3.18)$$

Häufig werden die Mindlinsche Plattentheorie und die Reissnersche Plattentheorie als Synonym für einander benutzt, obwohl sich die beiden Theorien voneinander unterscheiden [54, 63]. Im Gegensatz zur Mindlin-Theorie werden die Normalspannungen  $\sigma_{33}$  in der Reissnerschen Theorie nicht vernachlässigt, sondern als kubische Funktion von  $x_3$  angenommen, die an den Deckflächen der Platte den dort wirkenden Querbelastungen entspricht. Für die Schubspannungen wird ein parabolischer Verlauf angenommen.  $\sigma_{33}$  kann mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen des räumlichen Spannungszustandes ermittelt werden.  $w$ ,  $\psi_1$  und  $\psi_2$  stellen resultierende Formänderungsgrößen dar, die mit den zugehörigen Schnittgrößen dieselben Beiträge zur Formänderungsenergie liefern wie die wirklichen Spannungen und Verschiebungen.

## 4 Herleitung von Plattentheorien durch Reihenentwicklung

Die in Kapitel 3 vorgestellten Plattentheorien enthalten, da für ihre Herleitung Annahmen getroffen werden müssen, Widersprüche. So ist z.B. das Nichtberücksichtigen von Normalspannungen in Dickenrichtung unverträglich mit der Annahme, dass sich die Plattendicke während des Deformationsvorgangs nicht ändert. In den folgenden Kapiteln wird nun eine Möglichkeit zur Herleitung von Plattentheorien aufgezeigt, die ohne im voraus zu treffende Annahmen auskommt.

### 4.1 Herleitung elastischer Plattentheorien

Plattentheorien verschiedener Ordnung können hergeleitet werden, indem alle relevanten Größen in Potenzreihen bezüglich der Dickenkoordinate entwickelt werden [60, 45]

$$u_i(x_\alpha, x_3) = u_i^0(x_\alpha) + u_i^1(x_\alpha)x_3 + u_i^2(x_\alpha)x_3^2 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} u_i^l(x_\alpha) \cdot x_3^l. \quad (4.1)$$

Für die in dieser Arbeit verwendeten Indizes gilt  $i, j, k = 1, 2, 3$  und  $\alpha, \beta, \gamma = 1$  oder  $2$ . In den Arbeiten [60] und [45] wird die Koordinate  $x_3$  noch durch die Bezugslänge  $L$ , was bei einer Rechteckplatte die Plattenbreite wäre, geteilt und so von ihrer Dimension befreit. Darauf wird in dieser Arbeit verzichtet, da es für die spätere numerische Implementierung eher nachteilig ist. Das nullte Reihenglied  $u_i^0$  ist nicht von  $x_3$  abhängig. Es beschreibt also die Verschiebungen der Plattenmittelfläche.

Es wird eine Platte im kartesischen Koordinatensystem betrachtet (Abbildung 4.1). Die Mittelfläche und jede andere Fläche parallel zu ihr wird durch einen Rand  $\Gamma_S$  der Bogenlänge  $s$  begrenzt. Der Normalenvektor der seitlichen Begrenzungsfläche  $\bar{A}$  heißt  $\mathbf{n}$  und hat die Komponenten  $n_\alpha$ . Die Deckflächen der Platte liegen im Abstand  $\frac{h}{2}$  parallel zur Mittelfläche  $A$ . Zur Unterscheidung werden alle Größen bei  $x_3 = \frac{h}{2}$  mit einem Pluszeichen und alle Größen bei  $x_3 = -\frac{h}{2}$  mit einem Minuszeichen gekennzeichnet. So ist hier, wie in Abbildung 4.1 erkennbar ist,  $A^+$  die Deckfläche in positiver  $x_3$ -Richtung und  $A^-$  die Deckfläche in negativer  $x_3$ -Richtung.

Das Ziel dieser Herleitung ist, das dreidimensionale Kontinuum in geeigneter Weise durch Größen darzustellen, die nur noch von zwei Koordinaten, nämlich den Flächenkoordinaten  $x_\alpha$  abhängig sind. Eine Möglichkeit der Herleitung ist die Verwendung von Energieprinzipien.

Das Prinzip vom stationären Gesamtpotential besagt, dass ein Körper unter der Beanspruchung von Kräften diejenige Formänderung erfährt, für die die erste Variation des elastischen Potentials verschwindet



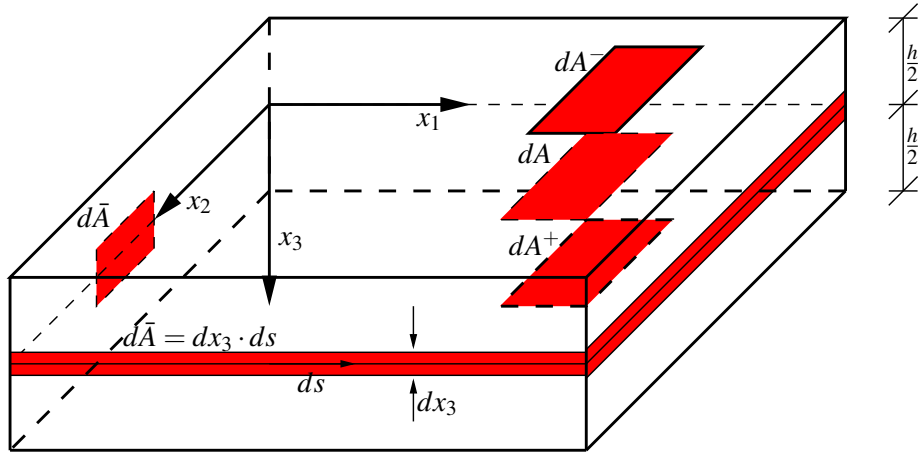


Abbildung 4.1: Geometrie der betrachteten Platte

$$\delta\Pi = \delta\Pi_I + \delta\Pi_A = 0. \quad (4.2)$$

Die Variation des inneren Potentials  $\delta\Pi_I$  wird aus den Spannungen und den virtuellen Verzerrungen berechnet

$$\delta\Pi_I = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega, \quad (4.3)$$

die durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes zu

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\Omega \quad (4.4)$$

umgeformt werden können. Der Rand Gamma umfasst dabei die gesamte Oberfläche der Platte, die sich aus

$$\Gamma = A^+ + A^- + \bar{A} \quad (4.5)$$

zusammensetzt. Es gilt das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij}, \quad (4.6)$$

sowie die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_{ij,j} = -\omega^2 \rho u_i. \quad (4.7)$$

Nach Einsetzen von (4.6) und (4.7) in (4.4) erhält man das variierte Potential

$$\int_{\Omega} \left[ \left( G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} \right) \delta u_{i,j} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \omega^2 \rho u_i \delta u_i d\Omega, \quad (4.8)$$

In diese Gleichung werden nun die in eine Potenzreihe entwickelten Verschiebungsgrößen aus (4.1) eingesetzt. Weiterhin wird eine Integration über die Plattendicke durchgeführt, um eine Dimension des 3-D-Kontinuums zu eliminieren. Man erhält so die Gleichungen ebener Flächentragwerke, unterteilt in Scheiben- und Plattengleichungen. Diese sind nicht miteinander verknüpft, d.h. das System der Gleichungen entkoppelt sich und zerfällt in den Scheibenanteil zur Bestimmung der Verformungsgrößen  $u_1^{2l}(x_1, x_2)$ ,  $u_2^{2l}(x_1, x_2)$  und  $u_3^{2l+1}(x_1, x_2)$  und den Plattenanteil zur Bestimmung der Verformungsgrößen  $u_1^{2l+1}(x_1, x_2)$ ,  $u_2^{2l+1}(x_1, x_2)$  und  $u_3^{2l}(x_1, x_2)$  [44].

Für niedrige Reihenglieder kann man diese Freiwerte mechanisch deuten. Für die Scheibe gilt

$$u_1^0(x_1, x_2) = u \quad u_2^0(x_1, x_2) = v, \quad (4.9)$$

wobei  $u$  und  $v$  die beiden Verschiebungen in horizontaler Richtung sind. Außerdem tritt bei der durch Reihenentwicklung hergeleiteten Scheibentheorie noch eine Dickenänderung  $u_3^1(x_1, x_2)$  auf [36], die in der klassischen Scheibentheorie nicht verwendet wird. Für die Platte gilt

$$u_1^1(x_1, x_2) = \psi_1 \quad u_2^1(x_1, x_2) = \psi_2 \quad u_3^0(x_1, x_2) = w \quad (4.10)$$

mit  $w$  als Verschiebung in  $x_3$ -Richtung und  $\psi_1$  bzw.  $\psi_2$  als Verdrehwinkel.

Die Randbedingungen können aus dem Integral

$$\int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Gamma \quad (4.11)$$

ermittelt werden. Da die Komponente des Normalenvektors  $n_3$  in  $x_3$ -Richtung auf den seitlichen Begrenzungsflächen  $\bar{A}$  der Platte null ist, gilt

$$\int_{\bar{A}} t_i \delta u_i d\bar{A} = \int_{\bar{A}} \sigma_{i\alpha} n_{\alpha} \delta u_i d\bar{A} = \int_{-h/2}^{+h/2} \oint_s \sigma_{i\alpha} n_{\alpha} \delta u_i ds dx_3. \quad (4.12)$$

Um die Integration über die Dicke abspalten zu können, werden Spannungsrésultanten eingeführt

$$m_{ij}^l = \int_{-h/2}^{+h/2} (x_3)^l \sigma_{ij} dx_3. \quad (4.13)$$

Die Spannungsrésultanten nullter Ordnung sind Kräfte, die erster Ordnung Momente pro Längeneinheit. Die Größen  $m_{\alpha 3}^0$  entsprechen den Querkräften, die  $m_{\alpha\beta}^0$  den Normalkräften und die  $m_{\alpha\beta}^1$  den Biege- und Drillmomenten. Für die anderen Spannungsrésultanten existieren keine entsprechenden Größen in der klassischen Theorie.

Da der Spannungstensor symmetrisch ist, gilt

$$m_{ij}^l = m_{ji}^l. \quad (4.14)$$

Das Randintegral aus Gleichung (4.12) wird durch Einsetzen der Spannungsrresultanten und mit Hilfe der Reihenentwicklung der Verschiebungen nach Gleichung (4.1)

$$\delta u_i = \sum_{l=0}^{\infty} \delta u_i^l(x_\alpha) x_3^l \quad (4.15)$$

zu

$$\int_{\bar{A}} (\sigma_{ij} n_j \delta u_i) d\bar{A} = \sum_{l=0}^{\infty} \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^l n_\alpha \delta u_\beta^l + m_{\alpha 3}^l n_\alpha \delta u_3^l \right) ds, \quad (4.16)$$

mit  $\int_{\bar{A}} d\bar{A} = \int_{-h/2}^{+h/2} \oint_s ds dx_3$ . Die Variation des Potentials der äußeren Kräfte  $\delta \Pi_a$  ist die negative Arbeit, die diese Kräfte auf der Oberfläche leisten. Als äußere Kräfte werden Oberflächenkräfte angenommen.

Bei den Oberflächenkräften unterscheidet man zwischen Kräften, die auf den Deckflächen  $A^+$  und  $A^-$  angreifen und solchen, die an den Begrenzungsflächen  $\bar{A}$  angreifen (siehe Abbildung 4.1). Auf den Begrenzungsflächen können entweder Verschiebungen  $u_i^*$  auf  $\bar{A}_u$  bzw. längs der Randkurve  $\Gamma_u$  oder Randlasten  $P_i^*$  auf  $\bar{A}_f$  bzw. längs der Umrandung  $\Gamma_f$  vorgegeben sein. Da die virtuellen Verschiebungen geometrisch verträglich sein müssen, muss auf der Randfläche  $\bar{A}_u$  gelten

$$u_i^* = u_i \quad \text{und} \quad \delta u_i = 0. \quad (4.17)$$

Die Randlasten  $P_i^*$  lassen sich durch Randspannungen  $\sigma_{ij}^*$  ausdrücken

$$P_i^* = \sigma_{ij}^* n_j, \quad (4.18)$$

wobei durch

$$m_{ij}^* = \int_{-h/2}^{+h/2} (x_3)^l \sigma_{ij}^* dx_3 \quad (4.19)$$

die Spannungsrresultanten aus den Randspannungen definiert werden. Das Potential der äußeren Kräfte kann nun durch die Gleichung

$$\delta \Pi_A = - \int_{A^+} P_i^+ \delta u_i^+ dA^+ - \int_{A^-} P_i^- \delta u_i^- dA^- - \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^* n_\alpha \delta u_\beta^l + m_{\alpha 3}^* n_\alpha \delta u_3^l \right) ds \quad (4.20)$$

beschrieben werden. In das dritte Integral können die in (4.19) definierten Spannungsrresultanten eingesetzt werden. Da Deckflächen und Mittelfläche in Form und Größe identisch sind, kann die Integrationen über die Deckflächen  $A^+$  und  $A^-$  auch als Integration über die Mittelfläche verstanden werden, wenn berücksichtigt wird, dass  $\delta u_i^+ = \delta u_i(x_3 = \frac{h}{2})$  und  $\delta u_i^- = \delta u_i(x_3 = -\frac{h}{2})$  gilt. Je nach Art der Reihenglieder können  $P_i^+$  und  $P_i^-$  zu einer äußeren Belastung zusammengefasst werden.

Für Reihenglieder der Ordnung  $l = 0, 2, 4, \dots$  gilt

$$\Sigma P_i = P_i^+ + P_i^-, \quad (4.21)$$

was den Reihengliedern für die Belastung einer Platte entspricht.

Für Reihenglieder der Ordnung  $l = 1, 3, 5, \dots$  gilt

$$\Delta P_i = P_i^+ - P_i^-, \quad (4.22)$$

was den Reihengliedern für die Belastung einer Scheibe entspricht. Das Potential der äußeren Kräfte liegt nun in der Form

$$\delta \Pi_A = - \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \int_A \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{2l} \Sigma P_i \delta u_i^{2l} + \left( \frac{h}{2} \right)^{2l+1} \Delta P_i \delta u_i^{2l+1} \right] dA - \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^l n_{\alpha} \delta u_{\beta}^l + m_{\alpha 3}^l n_{\alpha} \delta u_3^l \right) ds \right\} \quad (4.23)$$

vor. Außerdem können Volumenkräfte vorhanden sein. Auch diese können in eine Reihe bezüglich der Dickenkoordinate der Platte entwickelt werden

$$F_i(x_{\alpha}, x_3) = F_i^0(x_{\alpha}) + F_i^1(x_{\alpha})x_3 + F_i^2(x_{\alpha})x_3^2 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} F_i^l(x_{\alpha}) \cdot x_3^l. \quad (4.24)$$

Für die Variation des Gesamtpotentials erhält man

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_{\Omega} \left[ \left( G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} \right) \delta u_{i,j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} (F_i + \omega^2 \rho u_i) \delta u_i d\Omega \\ & - \sum_{l=0}^{\infty} \int_A \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^l \Sigma P_i \delta^l u_i + \left( \frac{h}{2} \right)^{2l+1} \Delta P_i \delta^{2l+1} u_i \right] dA \\ & + \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^l n_{\alpha} - m_{\alpha\beta}^{*l} n_{\alpha} \right) \delta u_{\beta}^l ds + \oint_s \left( m_{\alpha 3}^l n_{\alpha} - m_{\alpha 3}^{*l} n_{\alpha} \right) \delta u_3^l ds. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Lässt man nur Lasten in der Plattenebene  $P_{\alpha}$  zu, so enthalten die mit den virtuellen Verrückungen  $\delta u_{\beta}^{2l}$ ,  $\delta^{(2l+1)} u_3$  multiplizierten Ausdrücke nur Größen der Scheibentheorie. Wirken nur Lasten in Dickenrichtung  $P_3$ , so enthalten die Ausdrücke, die mit den virtuellen Verrückungen  $\delta^{(2l+1)} u_{\beta}^{2l}$ ,  $\delta u_3^{2l}$  multipliziert werden, nur Größen der Plattentheorie.

Nachdem das Volumenintegral mit Hilfe der im nächsten Abschnitt gezeigten Reihenentwicklung in ein Flächenintegral transformiert wurde, erhält man aus den Integralen über die Fläche die Gleichgewichtsbedingungen. Da die virtuellen Verrückungen  $\delta u_i^l$  voneinander unabhängig sind, müssen die Klammerausdrücke einzeln verschwinden. Aus dem Linienintegral erhält man dadurch die Randbedingungen, die für die Platte in der Form

$$\begin{aligned} m_{\alpha 3}^{*l} &= m_{\alpha 3}^l & \text{oder} & & u_3^{*l} &= u_3^l & l &= 0, 2, 4, \dots \\ m_{\alpha\beta}^{*l} &= m_{\alpha\beta}^l & \text{oder} & & u_{\alpha}^{*l} &= u_{\alpha}^l & l &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (4.26)$$

und für die Scheibe in der Form

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta}^{l*} &= m_{\alpha\beta}^l & \text{oder} & & u_{\alpha}^{l*} &= u_{\alpha}^l & l &= 0, 2, 4, \dots \\ m_{\alpha 3}^{l*} &= m_{\alpha 3}^l & \text{oder} & & u_3^{l*} &= u_3^l & l &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

vorliegen. Wie bei einem auf Weggrößenverfahren basierenden Ansatz üblich, müssen hier die Kraftgrößenrandbedingungen nicht gesondert behandelt werden. Sie werden durch die mit dem PvV für das Gesamtsystem formulierten Gleichgewichtsbedingungen angenähert erfüllt [2].

#### 4.1.1 Abbruch der Potenzreihe nach linearen Reihengliedern

Wird die Reihe nach linearen Gliedern abgebrochen, d.h.

$$u_i(x_{\alpha}, x_3) = u_i^0(x_{\alpha}) + u_i^1(x_{\alpha})x_3 = \sum_{l=0}^1 u_i^l(x_{\alpha}) \cdot x_3^l, \quad (4.28)$$

ergeben sich die folgenden Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) + \psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) + \psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + \psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Da die Gleichungssysteme für Scheibe und Platte entkoppelt sind, werden sie hier getrennt dargestellt. Für Platten gilt, dass alle äußeren Belastungen rechtwinklig zur Mittelfläche wirken, also in  $x_3$ -Richtung. Bei Scheiben wirken die äußeren Belastungen in  $x_1$  – und  $x_2$  – Richtung.

Für die Platte ergeben sich folgende Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_2(x_1, x_2) &= \psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Das heißt, dass die Querschnitte nach der Verformung eben bleiben, jedoch nicht mehr senkrecht auf der verformten Mittelfläche stehen. Außerdem gilt, daß

- die Verzerrung in  $x_3$ -Richtung  $\epsilon_{33}$  verschwindet
- die Querschubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  sind über die Höhe konstant verteilt, wodurch die Randbedingungen auf den Deckflächen verletzt werden
- die Normalspannung  $\sigma_{33}$  ist linear über die Höhe verteilt, wodurch die Randbedingungen auf den Deckflächen nur für spezielle Belastungen erfüllt werden können.

Um die Plattengleichungen übersichtlicher zu gestalten, werden die folgenden Abkürzungen eingeführt

$$B = \frac{2\nu}{1-2\nu} \quad C = \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \quad (4.31a)$$

$$\frac{{}^3H}{12} = \frac{h^3}{12} \quad \frac{{}^5H}{80} = \frac{h^5}{80} \quad \frac{{}^7H}{448} = \frac{h^7}{448} . \quad (4.31b)$$

Das Arbeitsprinzip der elastischen Platte kann mit folgender Gleichung beschrieben werden. Dabei wird angenommen, dass nur Lasten senkrecht zur Plattenoberfläche, also in  $x_3$ -Richtung wirken

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \delta w_{,\alpha} - h(\omega^2 \rho w + F_3^0) \delta w \right\} dA + \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - {}^3H \omega^2 \rho \psi_\alpha \right] \delta \psi_\alpha \right. \\ \left. + {}^3GH \left[ \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = \int_A \Sigma P_3 \delta w dA + \oint_s \left( m_{\alpha 3}^0 \delta w + m_{\alpha\beta}^1 \delta \psi_\beta \right) n_\alpha ds . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Gleichung (4.32) kann in ein System partieller Differentialgleichungen überführt werden, indem alle Terme, die eine Ableitung der Wichtungsfunktion enthalten, partiell integriert werden, das heißt

$$\int_A Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \delta w_{,\alpha} dA = \oint_s Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) n_\alpha \delta w ds - \int_A Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) \delta w dA \quad (4.33a)$$

$$\begin{aligned} &= \oint_s m_{\alpha 3}^0 \delta w n_\alpha ds - \int_A Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) \delta w dA \\ \int_A {}^3GH (\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \delta \psi_{\alpha,\beta} dA &= \oint_s {}^3GH (\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) n_\beta \delta \psi_\alpha ds \\ &\quad - \int_A {}^3GH (\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B \psi_{\gamma,\gamma\beta} \delta_{\alpha\beta}) \delta \psi_\alpha dA \\ &= \oint_s m_{\alpha\beta}^1 \delta \psi_\alpha n_\beta ds - \int_A {}^3GH (\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B \psi_{\gamma,\gamma\alpha}) \delta \psi_\alpha dA . \end{aligned} \quad (4.33b)$$

Die durch die partielle Integration entstandenen Ausdrücke werden in das Variationsprinzip (4.32) eingesetzt und nach den Wichtungsfunktionen  $\delta w$  und  $\delta \psi_\alpha$  sortiert. Die Randintegrale über  $ds$  heben sich gegenseitig auf.

Da die Variationen der primären Variablen als unabhängig angenommen werden, erhält man ein System von Differentialgleichungen für die Platte

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + h\omega^2 \rho w = -\Sigma P_3 - hF_3^0 \quad (4.34a)$$

$$Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - {}^3GH(\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B \psi_{\gamma,\gamma\alpha}) - {}^3H \omega^2 \rho \psi_\alpha = 0 . \quad (4.34b)$$

Vollzieht man bei diesem Gleichungssystem den Grenzübergang zur unendlich dünnen Platte, so erhält man eine Gleichung, die sich nur durch den Faktor  $\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}$  von der Kirchhoff'schen Plattentheorie

unterscheidet. Für die FE-Formulierung ist allerdings eine Variationsformulierung der einzelnen Gleichungen nötig

$$\delta w : \int_A \left\{ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha})\delta w_{,\alpha} - h\omega^2 \rho w \delta w \right\} dA = \int_A (\Sigma P_3 + hF_3^0) \delta w dA \quad (4.35a)$$

$$\delta \psi_\alpha : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \frac{3}{2} h\omega^2 \rho \psi_\alpha \right] \delta \psi_\alpha + GH \left[ \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0. \quad (4.35b)$$

Für die Scheibe ergeben sich nur Beiträge zu den Normalkräften  $\overset{0}{m}_{\alpha\beta}$  aus den Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2) &= \psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Außerdem tritt hier noch ein Freiwert für die Dickenänderung der Scheibe auf, der nur in erweiterten Scheibentheorien [36], aber nicht in der klassischen Scheibentheorie vorkommt. Der Freiwert  $\overset{1}{u}_3$  kann auch als Verdrehung  $\psi_3$  um die  $x_3$ -Achse verstanden werden. Mit nur in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung wirkender Belastung entsteht folgende Formulierung des Energieprinzips einer Scheibe

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ \left[ 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} u_{,1} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (v_{,2} + \psi_3) \right] \delta u_{,1} + Gh(u_{,2} + v_{,1}) \delta u_{,2} - h(\omega^2 \rho u + F_1^0) \delta u \right. \\ & + \left[ 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} v_{,2} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,1} + \psi_3) \right] \delta v_{,2} + Gh(v_{,1} + u_{,2}) \delta v_{,1} - h(\omega^2 \rho v + F_2^0) \delta v \\ & + \left[ 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} \psi_3 + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,1} + v_{,2}) - \frac{3}{2} h\omega^2 \rho \psi_3 \right] \delta \psi_3 + \frac{Gh^3}{12} (\psi_{3,1} \delta \psi_{3,1} + \psi_{3,2} \delta \psi_{3,2}) \left. \right\} dA \\ & = \int_A \Delta P_1 \delta u dA + \int_A \Delta P_2 \delta v dA + \oint_s \left( \overset{0}{m}_{\alpha\beta} \delta u_\beta + \overset{1}{m}_{\alpha 3} \delta \psi_3 \right) n_\alpha ds. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Auch diese Gleichung kann in ein System partieller Differentialgleichungen überführt werden, indem alle Terme, die eine Ableitung der Wichtungsfunktion enthalten partiell integriert werden und in die Variationsformulierung (4.37) eingesetzt werden. Es entsteht ein System aus drei partiellen Differentialgleichungen

$$2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} u_{,11} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (v_{,21} + \psi_{3,1}) + Gh(u_{,21} + v_{,12}) + h\omega^2 \rho u = -\Delta P_1 - hF_1^0 \quad (4.38a)$$

$$2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} v_{,22} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,12} + \psi_{3,2}) + Gh(v_{,12} + u_{,21}) + h\omega^2 \rho v = -\Delta P_2 - hF_2^0 \quad (4.38b)$$

$$\frac{Gh^3}{12}(\psi_{3,11} + \psi_{3,22}) - 2Gh\frac{1-\nu}{1-2\nu}\psi_3 - 2Gh\frac{\nu}{1-2\nu}(u_{,1} + v_{,2}) + \frac{3}{2}H\omega^2\rho\psi_3 = 0. \quad (4.38c)$$

Als Grundlage für die FEM kann folgende Formulierung benutzt werden

$$\begin{aligned} \delta u : \int_A \left\{ \left[ 2Gh\frac{1-\nu}{1-2\nu}u_{,1} + 2Gh\frac{\nu}{1-2\nu}(v_{,2} + \psi_3) \right] \delta u_{,1} + Gh(u_{,2} + v_{,1})\delta u_{,2} - h\omega^2\rho u\delta u \right\} dA \\ = \int_A (\Delta P_1 + hF_1^0)\delta u dA \end{aligned} \quad (4.39a)$$

$$\begin{aligned} \delta v : \int_A \left\{ \left[ 2Gh\frac{1-\nu}{1-2\nu}v_{,2} + 2Gh\frac{\nu}{1-2\nu}(u_{,1} + \psi_3) \right] \delta v_{,2} + Gh(v_{,1} + u_{,2})\delta v_{,1} - h\omega^2\rho v\delta v \right\} dA \\ = \int_A (\Delta P_2 + hF_2^0)\delta v dA \end{aligned} \quad (4.39b)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_3 : \int_A \left\{ \left[ 2Gh\frac{1-\nu}{1-2\nu}\psi_3 + 2Gh\frac{\nu}{1-2\nu}(u_{,1} + v_{,2}) - \frac{3}{2}H\omega^2\rho\psi_3 \right] \delta \psi_3 \right. \\ \left. + \frac{Gh^3}{12}(\psi_{3,1}\delta\psi_{3,1} + \psi_{3,2}\delta\psi_{3,2}) \right\} dA = 0. \end{aligned} \quad (4.39c)$$

Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf den Plattengleichungen liegt, werden die Scheibengleichungen hier nur für den linearen Verschiebungsansatz dargestellt.

#### 4.1.2 Abbruch der Potenzreihe nach quadratischen Reihengliedern

Bei Abbruch der Reihe nach den quadratischen Reihengliedern

$$u_i(x_\alpha, x_3) = u_i^0(x_\alpha) + u_i^1(x_\alpha)x_3 + u_i^2(x_\alpha)x_3^2 = \sum_{l=0}^2 u_i^l(x_\alpha) \cdot x_3^l, \quad (4.40)$$

entsteht der vollständige quadratische Verschiebungsansatz

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) + \psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + u_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) + \psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 + v_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + \psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3 + w_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Auch hier können Scheiben und Plattengleichungen entkoppelt werden. Es werden nur die Plattengleichungen näher betrachtet. Auch bei diesem Ansatz bleiben die Querschnitte nach der Verschiebung eben.



Neben der reinen Verschiebung in  $x_3$ -Richtung tritt nun auch eine Dickenverzerrung  $w_d$  auf. Für die Spannungen und Verzerrungen gilt

- die Querschubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  sind über die Höhe linear verteilt, was nicht der eigentlichen quadratischen Verteilung entspricht,
- die Normalspannung  $\sigma_{33}$  ist linear über die Höhe verteilt, was nicht der realen kubischen Verteilung entspricht.

Die Verschiebungen für die Platte sind

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_2(x_1, x_2) &= \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + w_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Zu den "klassischen Gleichungen" (4.32) kommt nun noch eine Gleichung für die Dickenverzerrung  $w_d$  hinzu. Es sind also vier Freiwerte vorhanden.

Die Verschiebungen für die Scheibe lauten

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) + u_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) + v_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ u_3(x_1, x_2) &= \Psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden Scheibengleichungen höherer Ordnung nicht betrachtet. Die Annahme, dass nur Lasten senkrecht zur Plattenoberfläche, also in  $x_3$ -Richtung wirken, und die Entkopplung der Scheiben- und Plattengleichungen lassen eine getrennte Betrachtung zu

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ \left[ Gh(\Psi_{\alpha} + w_{,\alpha}) + G^3 H w_{d,\alpha} \right] \delta w_{,\alpha} - \left[ h F_3^0 + H^3 F_3^2 + \omega^2 \rho (h w + H^3 w_d) \right] \delta w \right. \\ & + \left[ Gh(\Psi_{\alpha} + w_{,\alpha}) - \omega^2 \rho H^3 \Psi_{\alpha} + G^3 H w_{d,\alpha} \right] \delta \Psi_{\alpha} + G^3 H \left[ \Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + (B \Psi_{\gamma,\gamma} + 2 B w_d) \delta_{\alpha\beta} \right] \delta \Psi_{\alpha,\beta} \\ & + \left[ G^3 H (2 B \Psi_{\alpha,\alpha} + 4 C w_d) - \omega^2 \rho (H w + H^5 w_d) - H^3 F_3^0 - H^5 F_3^2 \right] \delta w_d + G \left[ H^3 (\Psi_{\alpha} + w_{,\alpha}) + H^5 w_{d,\alpha} \right] \delta w_{d,\alpha} \Big\} dA \\ & = \int_A \Sigma P_3 \delta w dA + \int_A \frac{h^2}{4} \Sigma P_3 \delta w dA + \oint_s \left( m_{\alpha 3}^0 \delta w + m_{\alpha\beta}^1 \delta \Psi_{\beta} + m_{\alpha 3}^2 \delta w_d \right) n_{\alpha} ds. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Analog zu (4.33) kann Gleichung (4.44) in ein System aus vier partiellen Differentialgleichungen überführt werden, indem alle Terme, die eine Ableitung der Wichtungsfunktion enthalten, partiell integriert

werden. Zusätzlich zu (4.33) werden folgende partiellen Integrationen durchgeführt

$$\int_A G \overset{3}{H} w_{d,\alpha} \delta w_{,\alpha} dA = \oint_s G \overset{3}{H} w_{d,\alpha} n_\alpha \delta w ds - \int_A G \overset{3}{H} w_{d,\alpha\alpha} \delta w dA \quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned} \int_A G \overset{3}{H} 2B w_d \delta_{\alpha\beta} \delta \psi_{\alpha,\beta} dA &= \oint_s G \overset{3}{H} 2B w_d \delta_{\alpha\beta} n_\beta \delta \psi_\alpha ds - \int_A G \overset{3}{H} 2B w_{d,\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta \psi_\alpha dA \\ &= \oint_s G \overset{3}{H} 2B w_d n_\alpha \delta \psi_{\alpha,\alpha} ds - \int_A G \overset{3}{H} 2B w_{d,\alpha} \delta \psi_{\alpha,\alpha} dA \end{aligned} \quad (4.45b)$$

$$\begin{aligned} \int_A G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H} w_{d,\alpha} \right] \delta w_{d,\alpha} dA &= \oint_s G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H} w_{d,\alpha} \right] n_\alpha \delta w_d ds \\ &- \int_A G \left[ \overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + \overset{5}{H} w_{d,\alpha\alpha} \right] \delta w_d dA. \end{aligned} \quad (4.45c)$$

Die Randintegrale über  $ds$  aus Gleichung (4.45) ergeben zusammen mit den Randintegralen aus (4.33) die Reihenentwicklung einzelner Spannungsrresultanten, wenn die Reihe nach quadratischen Gliedern abgebrochen wird. Im Gegensatz zu Gleichung (4.33) stellen die hier auftretenden Randintegrale über  $ds$  keine vollständigen Spannungsrresultanten  $m_{ij}^l$  dar, da Spannungsrresultanten zweiter und dritter Ordnung sowohl Anteile aus  $\overset{2}{u}_3$  als auch aus  $\overset{3}{u}_\alpha$  enthalten. Der quadratische Verschiebungsansatz enthält allerdings nur Anteile aus  $\overset{2}{u}_3 = w_d$ .

Durch Einsetzen der Umformungen (4.33) und (4.45) in das Variationsprinzip (4.44) entsteht das Differentialgleichungssystem

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + G \overset{3}{H} w_{d,\alpha\alpha} + \omega^2 \rho (hw + \overset{3}{H} w_d) = -h \overset{0}{F}_3 - \overset{3}{H} \overset{2}{F}_3 - \Sigma P_3 \quad (4.46a)$$

$$Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \omega^2 \rho \overset{3}{H} \psi_\alpha - G \overset{3}{H} (\psi_{\beta,\alpha\beta} + \psi_{\alpha,\beta\beta} + B \psi_{\gamma,\gamma\alpha} + (2B - 1) w_{d,\alpha}) = 0 \quad (4.46b)$$

$$G \overset{3}{H} (\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha} - 2B \psi_{\alpha,\alpha} - 4C w_d) + G \overset{5}{H} w_{d,\alpha\alpha} + \omega^2 \rho (\overset{3}{H} w + \overset{5}{H} \rho w_d) = -\overset{3}{H} \overset{0}{F}_3 - \overset{5}{H} \overset{2}{F}_3 - \frac{h^2}{4} \Sigma P_3. \quad (4.46c)$$

Die zugehörige Variationsformulierung der einzelnen Gleichungen lautet

$$\begin{aligned} \delta w : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G \overset{3}{H} w_{d,\alpha} \right] \delta w_{,\alpha} - \left[ \omega^2 \rho (hw + \overset{3}{H} w_d) \right] \delta w \right\} dA \\ = \int_A \left( \Sigma P_3 + h \overset{0}{F}_3 + \overset{3}{H} \overset{2}{F}_3 \right) \delta w dA \end{aligned} \quad (4.47a)$$

$$\delta\psi_\alpha : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \omega^2 \rho \overset{3}{H}\psi_\alpha + G\overset{3}{H}w_{d,\alpha} \right] \delta\psi_\alpha + G\overset{3}{H} \left[ \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta} \right] \delta\psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0 \quad (4.47b)$$

$$\delta w_d : \int_A \left\{ \left[ G\overset{3}{H}(2B\psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) - \omega^2 \rho(\overset{3}{H}w + \overset{5}{H}w_d) \right] \delta w_d + G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}w_{d,\alpha} \right] \delta w_{d,\alpha} \right\} dA = \int_A \left( \frac{h^2}{4} \Sigma P_3 + \overset{3}{H}F_3 + \overset{5}{H}F_3 \right) \delta w_d dA. \quad (4.47c)$$

### 4.1.3 Abbruch der Potenzreihe nach kubischen Reihengliedern

Wird die Reihe nach nach den kubischen Reihengliedern abgebrochen

$$u_i(x_\alpha, x_3) = \overset{0}{u}_i(x_\alpha) + \overset{1}{u}_i(x_\alpha)x_3 + \overset{2}{u}_i(x_\alpha)x_3^2 + \overset{3}{u}_i(x_\alpha)x_3^3 = \sum_{l=0}^3 \overset{l}{u}_i(x_\alpha) \cdot x_3^l, \quad (4.48)$$

entstehen Ansätze dritter Ordnung

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) + \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + u_d(x_1, x_2) + \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) + \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 + v_d(x_1, x_2) + \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + \Psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3 + w_d(x_1, x_2) + \Psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3^3. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Auch bei diesem Ansatz können die Scheiben- und die Plattengleichungen getrennt betrachtet werden. Die Ansätze dritter Ordnung für die Platte lauten

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_2(x_1, x_2) &= \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 + \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + w_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Beim kubischen Ansatz können sich die Querschnitte bei der Verformung der Platte verwölben, was durch die zusätzliche Berücksichtigung der Verformungen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  beschrieben wird. Auch die erste Bernoulli-Hypothese (siehe Kapitel 3.1) gilt hier also nicht mehr.

Im Gegensatz zum linearen und quadratischen Verschiebungsansatz entsprechen die Spannungen dem Gleichgewicht am differentiellen Würfel, d.h.

- die Querschubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  sind über die Höhe quadratisch verteilt,
- die Normalspannung  $\sigma_{33}$  verläuft kubisch über die Höhe.

Die Arbeitsgleichung enthält jetzt 6 Freiwerte

$$\begin{aligned}
& \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{,\alpha} - \left[ h\overset{0}{F}_3 + \overset{3}{H}\overset{2}{F}_3 + \omega^2 \rho (hw + \overset{3}{H}w_d) \right] \delta w \right. \\
& + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) - \omega^2 \rho (\overset{3}{H}\psi_\alpha + \overset{5}{H}\Psi_\alpha) \right] \delta \psi_\alpha \\
& + \left[ G\overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) + G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \\
& + \left[ G\overset{3}{H}(2B\psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) + 2G\overset{5}{H}B\Psi_{\alpha,\alpha} - \omega^2 \rho (\overset{3}{H}w + \overset{5}{H}w_d) - \overset{3}{H}\overset{0}{F}_3 - \overset{5}{H}\overset{2}{F}_3 \right] \delta w_d \\
& + G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{d,\alpha} \\
& + \left[ 3G\overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{5}{H}(9\Psi_\alpha + 3w_{d,\alpha}) - \omega^2 \rho (\overset{5}{H}\psi_\alpha + \overset{7}{H}\Psi_\alpha) \right] \delta \Psi_\alpha \\
& + \left. \left[ G\overset{5}{H}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) + G\overset{7}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta \Psi_{\alpha,\beta} \right\} dA \\
& = \int_A \left( \Sigma P_3 \delta w + \frac{h^2}{4} \Sigma P_3 \delta w_d \right) dA + \oint_s \left( m_{\alpha 3}^0 \delta w + \overset{1}{m}_{\beta\alpha} \delta \psi_\beta + \overset{2}{m}_{\alpha 3} \delta w_d + \overset{3}{m}_{\beta\alpha} \delta \Psi_\beta \right) n_\alpha ds .
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Durch identisches Vorgehen wie in Gleichung (4.33) wird Gleichung (4.51) in ein System aus 6 partiellen Differentialgleichungen überführt, indem alle Terme, die eine Ableitung der Wichtungsfunktion enthalten, partiell integriert werden. Zusätzlich zu (4.33) werden folgende partiellen Integrationen durchgeführt

$$\int_A G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \delta w_{,\alpha} dA = \oint_s G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) n_\alpha \delta w ds - \int_A G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) \delta w dA \tag{4.52a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[ G\overset{3}{H}2Bw_d\delta_{\alpha\beta} + G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} dA \\
& = \oint_s \left[ G\overset{3}{H}2Bw_d\delta_{\alpha\beta} + G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] n_\beta \delta \psi_\alpha ds \\
& - \int_A \left[ G\overset{3}{H}2Bw_{d,\beta}\delta_{\alpha\beta} + G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\beta}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta \psi_\alpha dA \\
& = \oint_s \left[ G\overset{3}{H}2Bw_d\delta_{\alpha\beta} + G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] n_\beta \delta \psi_\alpha ds
\end{aligned} \tag{4.52b}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_A \left[ GH^3 2Bw_{d,\alpha} + GH^5 (\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) \right] \delta\Psi_\alpha dA \\
& \int_A G \left[ H^3 (\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + H^5 (w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{d,\alpha} dA = \oint_s G \left[ H^3 (\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + H^5 (w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] n_\alpha \delta w_d ds \\
& \quad (4.52c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_A G \left[ H^3 (\Psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + H^5 (w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) \right] \delta w_d dA \\
& \int_A \left[ GH^5 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d \delta_{\alpha\beta}) + GH^7 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \right] \delta\Psi_{\alpha,\beta} dA \quad (4.52d) \\
& = \oint_s \left[ GH^5 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d \delta_{\alpha\beta}) + GH^7 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \right] n_\beta \delta\Psi_\alpha ds \\
& - \int_A \left[ GH^5 (\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) + GH^7 (\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) \right] \delta\Psi_\alpha dA
\end{aligned}$$

Die Randintegrale über  $ds$  aus Gleichung (4.52) ergeben zusammen mit den Randintegralen aus (4.33) die Reihenentwicklung einzelner Spannungsresultanten, wenn die Reihe nach kubischen Gliedern abgebrochen wird.

$$\oint_s Gh(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) n_\alpha \delta w_d ds + \oint_s GH^3 (w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) n_\alpha \delta w_d ds = \oint_s m_{\alpha 3}^0 n_\alpha \delta w_d ds \quad (4.53a)$$

$$\begin{aligned}
& \oint_s GH^3 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) n_\beta \delta\Psi_\alpha ds + \oint_s \left[ GH^3 2Bw_d + GH^5 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \right] n_\beta \delta\Psi_\alpha ds \\
& = \oint_s m_{\alpha\beta}^1 n_\beta \delta\Psi_\alpha ds \quad (4.53b)
\end{aligned}$$

$$\oint_s G \left[ H^3 (\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + H^5 (w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] n_\alpha \delta w_d ds = \oint_s m_{\alpha 3}^2 n_\alpha \delta w_d ds \quad (4.53c)$$

$$\begin{aligned}
& \oint_s \left[ GH^5 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d \delta_{\alpha\beta}) + GH^7 (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \right] n_\beta \delta\Psi_\alpha ds \\
& = \oint_s m_{\alpha\beta}^3 n_\beta \delta\Psi_\alpha ds \quad (4.53d)
\end{aligned}$$

Es entsteht ein Differentialgleichungssystem aus 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + \omega^2 \rho(hw + {}^3Hw_d) + {}^3GH(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) = -hF_3^0 - {}^3HF_3^2 - \Sigma P_3 \quad (4.54a)$$

$$\begin{aligned} Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + {}^3GH(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) - \omega^2 \rho({}^3H\psi_\alpha + {}^5H\Psi_\alpha) \\ - {}^3GH(\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) - {}^5GH(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) = 0 \end{aligned} \quad (4.54b)$$

$$\begin{aligned} {}^3GH(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + {}^5GH(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) - {}^3GH(2B\Psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) - {}^5GH 2B\Psi_{\alpha,\alpha} \\ + \omega^2 \rho({}^3Hw + {}^5Hw_d) = -{}^3HF_3^0 - {}^5HF_3^2 - \frac{h^2}{4}\Sigma P_3 \end{aligned} \quad (4.54c)$$

$$\begin{aligned} 3{}^3GH(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + {}^5GH(9\Psi_\alpha + 3w_{d,\alpha}) - \omega^2 \rho({}^5H\psi_\alpha + {}^7H\Psi_\alpha) \\ - {}^5GH(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) - {}^7GH(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) = 0. \end{aligned} \quad (4.54d)$$

Die zugehörige Variationsformulierung der einzelnen Gleichungen lautet

$$\delta w : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + {}^3GH(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{,\alpha} - \left[ \omega^2 \rho(hw + {}^3Hw_d) \right] \delta w \right\} dA \quad (4.55a)$$

$$= \int_A \left( \Sigma P_3 + hF_3^0 + {}^3HF_3^2 \right) \delta w dA \quad (4.55b)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_\alpha : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + {}^3GH(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) - \omega^2 \rho({}^3H\psi_\alpha + {}^5H\Psi_\alpha) \right] \delta \psi_\alpha \right. \\ \left. + \left[ {}^3GH(\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + (B\Psi_{\gamma,\gamma} + 2Bw_d)\delta_{\alpha\beta}) + {}^5GH(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0 \end{aligned} \quad (4.55c)$$

$$\begin{aligned} \delta w_d : \int_A \left\{ \left[ {}^3GH(2B\Psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) + 2{}^5GH B\Psi_{\alpha,\alpha} - \omega^2 \rho({}^3Hw + {}^5Hw_d) \right] \delta w_d \right. \\ \left. + G \left[ {}^3H(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + {}^5H(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{d,\alpha} \right\} dA = \int_A \frac{h^2}{4} \left( \Sigma P_3 + {}^3HF_3^0 + {}^5HF_3^2 \right) \delta w_d dA \end{aligned} \quad (4.55d)$$

$$\begin{aligned}
\delta\Psi_\alpha : \int_A \left\{ \left[ 3\overset{3}{GH}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{GH}(9\Psi_\alpha + 3w_{d,\alpha}) - \omega^2\rho(\overset{5}{H}\psi_\alpha + \overset{7}{H}\Psi_\alpha) \right] \delta\Psi_\alpha \right. \\
\left. + \left[ \overset{5}{GH}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_{d,\alpha}\delta_{\alpha\beta}) + \overset{7}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta\Psi_{\alpha,\beta} \right\} dA \\
= 0.
\end{aligned} \tag{4.55e}$$

Diese Formulierung beschreibt das Verhalten dickerer Platten sehr gut, ohne dass zusätzliche Annahmen getroffen werden müssen und somit Widersprüche zu den Gesetzen der Mechanik entstehen. Sie liefert laut [60] Ergebnisse, die annähernd mit denen der Reissnerschen Theorie identisch sind. Von der Gestalt her sehen die Gleichungen allerdings völlig unterschiedlich aus. Die Gleichungen aus der Reihenentwicklung mit kubischem Verschiebungsansatz enthalten 6 Weggrößen als Freiwerte, die Reissnerschen Gleichungen enthalten 3 Integrale über Weggrößen als Freiwerte.

#### 4.1.4 Betrachtungsweise von Kienzler

Eine weitere Möglichkeit der Herleitung von Plattentheorien durch Reihenentwicklung wurde in der Arbeit von Kienzler [45, 46] dargestellt. Dabei wird die Reihenentwicklung nach einer bestimmten Potenz der Plattendicke abgebrochen. Die Reihenentwicklung erfolgt analog zu Gleichung (4.1) und wird in die Gleichung für das variierte Potential (4.8) eingesetzt. Werden alle Terme, ab  $h^2$  vernachlässigt, entsteht folgendes Differentialgleichungssystem.

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + h(\omega^2\rho w) = -\Sigma P_3 - h\overset{0}{F}_3 \tag{4.56a}$$

$$Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) = 0. \tag{4.56b}$$

Dieses Gleichungssystem ist nur für  $P_3 = 0$  und unter Vernachlässigung der Trägheitsterme lösbar. Die Lösung stellt eine reine Starrkörperbewegungen der Platte dar. Wird die Reihe erst ab der Potenz  $h^4$  abgebrochen entsteht folgendes Gleichungssystem

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + \omega^2\rho(hw + \overset{3}{H}w_d) + \overset{3}{GH}(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) = -h\overset{0}{F}_3 - \overset{3}{H}\overset{2}{F}_3 - \Sigma P_3 \tag{4.57a}$$

$$\begin{aligned}
Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{3}{GH}(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) - \omega^2\rho\overset{3}{H}\psi_\alpha \\
- \overset{3}{GH}(\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} - B\psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) = 0
\end{aligned} \tag{4.57b}$$

$$\overset{3}{GH}(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha} - 2B\psi_{\alpha,\alpha} - 4Cw_d) + \omega^2\rho\overset{3}{H}w = -\overset{3}{H}\overset{0}{F}_3 - \frac{h^2}{4}\Sigma P_3 \tag{4.57c}$$

$$\overset{3}{GH}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) = 0. \tag{4.57d}$$

Die zugehörige Variationsformulierung lautet

$$\begin{aligned} \delta w : \\ \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{,\alpha} - \left[ \omega^2 \rho (hw + \overset{3}{H}w_d) \right] \delta w \right\} dA \\ = \int_A \left( \overset{0}{\Sigma}P_3 + h\overset{0}{F}_3 + \overset{3}{H}\overset{2}{F}_3 \right) \delta w dA \end{aligned} \quad (4.58a)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_\alpha : \\ \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) - \omega^2 \rho \overset{3}{H}\psi_\alpha \right] \delta \psi_\alpha \right. \\ \left. + \left[ G\overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0 \end{aligned} \quad (4.58b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_d : \\ \int_A \left\{ \left[ G\overset{3}{H}(2B\psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) - \omega^2 \rho \overset{3}{H}w \right] \delta w_d + G\overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \delta w_{d,\alpha} \right\} dA = \int_A \left( \frac{h^2}{4} \overset{0}{\Sigma}P_3 + \overset{3}{H}\overset{0}{F}_3 \right) \delta w dA \end{aligned} \quad (4.58c)$$

$$\begin{aligned} \delta \Psi_\alpha : \\ \int_A 3G\overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \delta \Psi_\alpha dA = 0. \end{aligned} \quad (4.58d)$$

Wenn die Trägheitsterme vernachlässigt werden kann das Differentialgleichungssystem (4.57) in Gleichungen für die Kirchhoffsche Plattentheorie umgeformt werden.

Gleichung (4.57d) wird null, wenn gilt

$$\psi_\alpha + w_{,\alpha} = 0, \quad (4.59)$$

das heißt

$$\psi_1 = -w_{,1} \quad (4.60a)$$

$$\psi_2 = -w_{,2}. \quad (4.60b)$$

Mit Hilfe dieser Formulierungen kann aus Gleichung (4.57) eine Formulierung für  $w_d$  gefunden werden

$$w_d = \frac{\nu}{2(1-\nu)} \Delta w. \quad (4.61)$$



Durch Einsetzen von (4.60) und (4.61) in (4.57c) erhält man

$$3\Psi_\alpha = -\frac{4+\nu}{2(1-\nu)}\Delta w_{,\alpha}. \quad (4.62)$$

Durch Einsetzen dieser Umformungen in Gleichung (4.57a) entsteht eine Formulierung für die Kirchhoffsche Plattentheorie.

Die Entwicklung der Freiwerte der Elastizitätstheorie in Potenzreihen führt je nach Auswertung der Reihen auf unterschiedliche Plattentheorien. Der Abbruch der Reihe nach allen Reihengliedern mit linearem Verschiebungsansatz führt zu Plattengleichungen, die stark denen der Kirchhofftheorie ähneln. Bricht man die Reihe nach den kubischen Reihengliedern ab, erhält man Gleichungen, deren Ergebnisse denen der Reissnerschen Theorie sehr ähnlich sind. Wird die Reihe nach dem quadratischen Reihengliedern abgebrochen, entsteht eine Art unfertige Zwischenstufe. Wird der Ansatz von Kienzler verfolgt, ergeben sich durch den Abbruch der Reihe nach der Potenz der Plattendicke  $h^4$ , Gleichungen, die der Kirchhoffsche Plattentheorie entsprechen.

## 4.2 Herleitung der poroelastischen Plattengleichungen

In diesem Kapitel wird mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung eine Plattentheorie aus den Formulierungen für ein poroelastisches Kontinuum hergeleitet. Zusätzlich zu den Verschiebungen aus Gleichung (4.1) wird nun auch der Porendruck in eine Potenzreihe bezüglich der Dickenkoordinate entwickelt

$$p(x_\alpha, x_3) = \overset{0}{p}(x_\alpha) + \overset{1}{p}(x_\alpha)x_3 + \overset{2}{p}(x_\alpha)x_3^2 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \overset{l}{p}(x_\alpha) \cdot x_3^l. \quad (4.63)$$

Die Geometrie der Platte ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Das Prinzip des stationären Gesamtpotentials eines dreidimensionalen poroelastischen Kontinuums wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} + \zeta \delta p) d\Omega, \quad (4.64)$$

die durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes zu

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} + \zeta \delta p) d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{1}{i\omega} q_n \delta p d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{i\omega} q_i \delta p_{,i} d\Omega \quad (4.65)$$

umgeformt werden kann, wobei die Kontinuitätsgleichung  $\zeta = -\frac{1}{i\omega} q_{i,i}$  gilt.  $\sigma_{ij}$  und  $\zeta$  werden in Gleichung (2.4) definiert, und  $\frac{q_i}{i\omega}$  wird mit Hilfe des modifizierten Gesetzes von Darcy beschrieben

$$\frac{q_i}{i\omega} = \frac{\beta}{\omega^2 \rho_f} p_{,i} - \beta u_i. \quad (4.66)$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in (4.65) erhält man die folgende Formulierung

$$\int_{\Omega} \left[ \left( G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \right) \delta u_{i,j} + \left( \alpha u_{i,i} + \frac{\phi^2}{R} p \right) \delta p \right] d\Omega \quad (4.67)$$

$$= \int_{\Gamma} \left[ (t_i \delta u_i - \frac{1}{i\omega} q_n \delta p) \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ (\beta p_{,i} + \omega^2 (\rho - \beta \rho_f) u_i + F_i) \delta u_i + \left( \frac{\beta}{\omega^2 \rho_f} p_{,i} - \beta u_i \right) \delta p_{,i} \right] d\Omega$$

mit  $q_n = q_i n_i$ .

In diese Gleichung werden nun die in eine Potenzreihe entwickelten Verschiebungsgrößen aus (4.1) und (4.63) eingesetzt. Weiterhin wird eine Integration über die Plattendicke durchgeführt, um eine Dimension des 3-D-Kontinuums zu eliminieren. Man erhält auch hier die Gleichungen ebener Flächentragwerke, unterteilt in Scheiben- und Plattengleichungen.

Die Reihenglieder  $\frac{2l}{u_1}(x_1, x_2)$ ,  $\frac{2l}{u_2}(x_1, x_2)$ ,  $\frac{2l+1}{u_3}(x_1, x_2)$  und  $\frac{2l}{p}(x_1, x_2)$  stellen die Freiwerte für die poroelastische Scheibentheorie dar, die Reihenglieder  $\frac{2l+1}{u_1}(x_1, x_2)$ ,  $\frac{2l+1}{u_2}(x_1, x_2)$ ,  $\frac{2l}{u_3}(x_1, x_2)$  und  $\frac{2l+1}{p}(x_1, x_2)$  die Freiwerte für die poroelastische Plattentheorie. Die mechanische Bedeutung der Plattenfreiwerte für das Festkörperskelett wurde in Kapitel 4.1 beschrieben. Die Reihenglieder für den Porendruck können nicht anschaulich gedeutet werden. Der elastische Teil der Gleichungen ist identisch mit den Gleichungen aus Kapitel 4.1, wird aber noch um poroelastische Terme ergänzt.

Wie schon bei der elastischen Platte, können die Randbedingungen aus den Randintegralen ermittelt werden, die hier allerdings anders aussehen. Das erste Randintegral ist identisch mit Gleichung (4.11)

$$\int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Gamma. \quad (4.68)$$

Allerdings handelt es sich bei  $\sigma_{ij}$  um die totale Spannung, die sich aus der Spannung im Festkörperskelett und der Spannung im Fluid zusammensetzt. Auch hier ist die Komponente des Normalenvektors in  $x_3$ -Richtung  $n_3$  auf den seitlichen Begrenzungsflächen der Platte null und damit gilt

$$\int_{\bar{A}} t_i \delta u_i d\bar{A} = \int_{\bar{A}} \sigma_{i\alpha} n_{\alpha} \delta u_i d\bar{A}. \quad (4.69)$$

Die Spannungsergebnanten sind wie in Gleichung (4.11) definiert

$$m_{ij}^l = \int_{-h/2}^{+h/2} (x_3)^l \sigma_{ij} dx_3. \quad (4.70)$$

Eine mechanische Erklärung einzelner Spannungsergebnanten in Form von Schnittgrößen ist hier allerdings nicht sinnvoll, da es sich bei  $\sigma_{ij}$  um die totale Spannung handelt. Der zweite Teil der Randbedingungen wird aus dem Integral

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{i\omega} q_n \delta p d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{i\omega} q_i n_i \delta p d\Gamma \quad (4.71)$$

ermittelt, woraus mit  $n_3 = 0$

$$\int_{\bar{A}} \frac{1}{i\omega} q_n \delta p d\bar{A} = \int_{\bar{A}} \frac{1}{i\omega} q_{\alpha} n_{\alpha} \delta p d\bar{A} \quad (4.72)$$

wird. Um die Integration über die Dicke abspalten zu können, werden wieder Resultanten eingeführt

$$r_i^l = \frac{1}{i\omega} \int_{-h/2}^{+h/2} (x_3)^l q_i dx_3. \quad (4.73)$$

Die Variation des Potentials der äußeren Kräfte  $\delta\Pi_a$  ist die negative Arbeit, die diese Kräfte auf der Oberfläche leisten. Zusätzlich zu den Oberflächenkräften aus Kapitel 4.1 kann nun auch ein Oberflächenfluss auftreten.

Das erste Randintegral (4.68) wird durch Einsetzen der Spannungsergebnisse zu

$$\int_{\bar{A}} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\bar{A} = \sum_{l=0}^{\infty} \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^l n_\alpha \delta u_\beta^l + m_{\alpha 3}^l n_\alpha \delta u_3^l \right) ds, \quad (4.74)$$

das zweite Randintegral (4.72) zu

$$\int_{\bar{A}} \frac{1}{i\omega} q_i n_i \delta p d\bar{A} = \sum_{l=0}^{\infty} \oint_s r_\alpha^l n_\alpha \delta p^l ds. \quad (4.75)$$

Wie bei den Oberflächenkräften wird zwischen Fluss  $P_Q^+$  bzw.  $P_Q^-$  auf den Deckflächen  $A^+$  und  $A^-$  und Fluss an den Begrenzungsflächen  $\bar{A}$  unterschieden (siehe Abbildung 4.1). Auf den Begrenzungsflächen können entweder Porendruck  $p$  auf  $\bar{A}_p$  bzw. längs der Randkurve  $\Gamma_p$  oder die Flussresultanten  $r_i^*$  auf  $\bar{A}_{P_Q}$  bzw. längs der Umrandung  $\Gamma_{P_Q}$  vorgegeben sein. Da die virtuellen Verschiebungen geometrisch verträglich sein müssen, gilt auf der Randfläche  $\bar{A}_u$

$$u_i^* = u_i \quad \text{und} \quad \delta u_i = 0 \quad (4.76)$$

und auf der Randfläche  $\bar{A}_p$

$$p^* = p \quad \text{und} \quad \delta p = 0. \quad (4.77)$$

Analog zum elastischen Fall können die Randlasten  $P_i^*$  durch die totalen Randspannungen  $\sigma_{ij}^*$  beschrieben werden

$$P_i^* = \sigma_{ij}^* n_j, \quad (4.78)$$

wobei durch

$$m_{ij}^l = \int_{-h/2}^{+h/2} (x_3)^l \sigma_{ij} dx_3 \quad (4.79)$$

die Spannungsergebnisse aus den Randspannungen definiert werden. Auf die selbe Weise können die 'Randflüsse'  $P_Q$  für den Fluss  $q$  ausgedrückt werden

$$P_Q^* = q_i^* n_i. \quad (4.80)$$

Die Resultanten der 'Randflüsse' werden durch

$$r_i^l = \frac{1}{i\omega} \int_{-h/2}^{+h/2} (x_3)^l q_i dx_3 \quad (4.81)$$

definiert.

Das Potential der äußeren Kräfte kann nun durch die Gleichung

$$\delta\Pi_a = - \int_{A^+} P_i^+ \delta u_i^+ dA^+ + \int_{A^+} \frac{1}{i\omega} P_Q^+ \delta p^+ dA^+ - \int_{A^-} P_i^- \delta u_i^- dA^- + \int_{A^-} \frac{1}{i\omega} P_Q^- \delta p^- dA^- \quad (4.82)$$

$$- \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^* n_\alpha \delta u_\beta^l + m_{\alpha 3}^* n_\alpha \delta u_3^l \right) ds + \oint_s r_\alpha^* n_\alpha \delta p^l ds \quad (4.83)$$

dargestellt werden. Auch hier können die Integrationen über die Deckflächen auch als Integrationen über die Mittelfläche verstanden werden, wenn berücksichtigt wird, dass

$$\delta u_i^+ = \delta u_i(x_3 = \frac{h}{2}), \delta u_i^- = \delta u_i(x_3 = -\frac{h}{2}), \delta p^+ = \delta p(x_3 = \frac{h}{2}) \text{ und } \delta p^- = \delta p(x_3 = -\frac{h}{2}) \text{ sind.}$$

$P_Q^+$  und  $P_Q^-$  stehen hier für die auf den Deckflächen angreifenden Flusslasten, welche zu einer äußeren Belastung zusammengefasst werden können.

Für Reihenglieder der Ordnung  $l = 0, 2, 4, \dots$  gilt

$$\Sigma P_Q = P_Q^+ + P_Q^-, \quad (4.84)$$

was den Reihengliedern für die Flussbelastung einer Scheibe entspricht.

Für Reihenglieder der Ordnung  $l = 1, 3, 5, \dots$  gilt

$$\Delta P_Q = P_Q^- - P_Q^+, \quad (4.85)$$

was den Reihengliedern für die Flussbelastung einer Platte entspricht. Das Potential der äußeren Kräfte wird nun durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \delta \Pi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ - \int_A \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{2l} \Sigma P_i \delta u_i^{2l} + \left( \frac{h}{2} \right)^{2l+1} \Delta P_i \delta u_i^{2l+1} \right] dA + \int_A \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{2l} \frac{\Sigma P_Q}{i\omega} \delta p^{2l} + \left( \frac{h}{2} \right)^{2l+1} \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^{2l+1} \right] dA \right. \\ \left. - \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^* n_\alpha \delta u_\beta^l + m_{\alpha 3}^* n_\alpha \delta u_3^l \right) ds + \oint_s r_\alpha^* n_\alpha \delta p^l ds \right\} \quad (4.86) \end{aligned}$$

dargestellt. Die Variation des Gesamtpotentials lautet dann

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_{\Omega} \left[ \left( G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \right) \delta u_{i,j} + \left( \alpha u_{i,i} + \frac{\phi^2}{R} p \right) \delta p \right] d\Omega \\ - \int_{\Omega} \left[ [\beta p_{,i} + \omega^2 (\rho - \beta \rho_f) u_i + F_i] \delta u_i + \left[ \frac{\beta}{\omega^2 \rho_f} p_{,i} - \beta u_i \right] \delta p_{,i} \right] d\Omega \\ - \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \int_A \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{2l} \Sigma P_i \delta u_i^{2l} + \left( \frac{h}{2} \right)^{2l+1} \Delta P_i \delta u_i^{2l+1} \right] dA - \int_A \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{2l} \frac{\Sigma P_Q}{i\omega} \delta p^{2l} + \left( \frac{h}{2} \right)^{2l+1} \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^{2l+1} \right] dA \right. \\ \left. + \oint_s \left( m_{\alpha\beta}^* n_\alpha - m_{\alpha\beta}^* n_\alpha \right) \delta u_\beta^l ds + \oint_s \left( m_{\alpha 3}^* n_\alpha - m_{\alpha 3}^* n_\alpha \right) \delta u_3^l ds + \oint_s \left( r_\alpha^* n_\alpha \delta p^l - r_\alpha^* n_\alpha \delta p^l \right) ds \right\}. \quad (4.87) \end{aligned}$$

Nachdem das Volumenintegral mit Hilfe der im nächsten Abschnitt gezeigten Reihenentwicklung in ein Flächenintegral transformiert wurde, erhält man aus den Integralen über die Fläche die Gleichgewichtsbedingungen. Da die virtuellen Verrückungen  $\delta u_i^l$ , sowie die virtuellen Porendrücke  $\delta p^l$  voneinander unabhängig sind müssen die Klammerausdrücke einzeln verschwinden. Aus dem Linienintegral erhält man

dadurch die Randbedingungen, die für die Platte in der Form

$$\begin{aligned} m_{\alpha 3}^{l*} &= m_{\alpha 3}^l \quad \text{oder} \quad u_3^{l*} = u_3^l \quad l = 0, 2, 4, \dots \\ m_{\alpha \beta}^{l*} &= m_{\alpha \beta}^l \quad \text{oder} \quad u_{\alpha}^{l*} = u_{\alpha}^l \quad l = 1, 3, 5, \dots \\ r_{\alpha}^{l*} &= r_{\alpha}^l \quad \text{oder} \quad p^{l*} = p^l \quad l = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (4.88)$$

vorliegen und für die Scheibe in der Form

$$\begin{aligned} m_{\alpha \beta}^{l*} &= m_{\alpha \beta}^l \quad \text{oder} \quad u_{\alpha}^{l*} = u_{\alpha}^l \quad l = 0, 2, 4, \dots \\ m_{\alpha 3}^{l*} &= m_{\alpha 3}^l \quad \text{oder} \quad u_3^{l*} = u_3^l \quad l = 1, 3, 5, \dots \\ r_{\alpha}^{l*} &= r_{\alpha}^l \quad \text{oder} \quad p^{l*} = p^l \quad l = 0, 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (4.89)$$

Eventuell vorhandene Volumenkräfte werden wie in Gleichung (4.24) entwickelt.

#### 4.2.1 Abbruch der Reihe nach linearen Reihengliedern für die poroelastische Platte

Wie schon bei der elastischen Platte erhält man die erste Näherung, wenn die Reihe nach linearen Gliedern abgebrochen wird, d.h

$$\begin{aligned} u_i(x_{\alpha}, x_3) &= u_i^0(x_{\alpha}) + u_i^1(x_{\alpha})x_3 = \sum_{l=0}^1 u_i^l(x_{\alpha}) \cdot x_3^l \\ p(x_{\alpha}, x_3) &= p^0(x_{\alpha}) + p^1(x_{\alpha})x_3 = \sum_{l=0}^1 p^l(x_{\alpha}) \cdot x_3^l. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Es ergeben sich folgende Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) + \psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) + \psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + \psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ p(x_1, x_2) &= p^0(x_1, x_2) + p^1(x_1, x_2) \cdot x_3. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Auch hier kommt es zu einer Entkoppelung von Scheiben- und Plattengleichungen, die deshalb wieder getrennt dargestellt werden. Die Freiwerte für die Platte lauten

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_2(x_1, x_2) &= \psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) \\ p(x_1, x_2) &= p^1(x_1, x_2) \cdot x_3. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Zusätzlich zu den Freiwerten der elastischen Platte kommt also noch ein Druckfreiheitsgrad hinzu. Da es sich trotz des poroelastischen Materialgesetzes beim Festkörperskelett weiterhin um einen linear-elastischen Körper handelt, gelten für die Spannungen und Verzerrungen die selben Annahmen wie in Abschnitt 4.1.1.

Zusätzlich zu den Abkürzungen im Kapitel 4.1.1 werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$J = \omega^2(\rho - \beta\rho_f) \quad (4.93a)$$

$$\overset{1}{N} = 2\alpha + \beta \quad \overset{2}{N} = 2\alpha + 3\beta \quad (4.93b)$$

$$b = \frac{\beta}{\omega^2\rho_f} \quad (4.93c)$$

Für das Arbeitsprinzip der Platte ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ -h(\beta \overset{1}{p} + Jw + \overset{0}{F}_3)\delta w + Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha})\delta w_{,\alpha} \right. \\ & + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \overset{3}{H}(J\psi_\alpha + \beta \overset{1}{p}_{,\alpha}) \right] \delta \psi_\alpha + \left[ \overset{3}{GH}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) - \overset{3}{H}\alpha \overset{1}{p}\delta_{\alpha\beta} \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \\ & + \left. \left[ \left( \overset{3}{H}\frac{\phi^2}{R} - hb \right) \overset{1}{p} + h\beta w + \overset{3}{H}\alpha\psi_{\alpha,\alpha} \right] \delta \overset{1}{p} + \overset{3}{H} \left( \beta\psi_\alpha - b \overset{1}{p}_{,\alpha} \right) \delta \overset{1}{p}_{,\alpha} \right\} dA \\ & = \int_A \left( \Sigma P_3 \delta w - \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta \overset{1}{p} \right) dA + \oint_s \left( m_{\alpha 3}^0 \delta w + \overset{1}{m}_{\alpha\beta} \delta \psi_\alpha + m_{\alpha 3}^2 \delta w_d - \overset{1}{r}_\alpha \delta \overset{1}{p} \right) n_\alpha ds. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Wie schon Gleichung (4.32) kann auch diese Gleichung in ein System partieller Differentialgleichungen überführt werden, indem alle Terme, die eine Ableitung der Wichtungsfunktion enthalten, partiell integriert werden

$$\int_A Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha})\delta w_{,\alpha} dA \quad (4.95a)$$

$$\begin{aligned} & = \oint_s Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha})n_\alpha \delta w ds - \int_A Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha})\delta w dA \\ & = \oint_s m_{\alpha 3}^0 \delta w ds - \int_A Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha})\delta w dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \overset{3}{GH}\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} - \overset{3}{H}\alpha \overset{1}{p}\delta_{\alpha\beta} \right) \delta \psi_{\alpha,\beta} dA \\ & = \oint_s \left( \overset{3}{GH}\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} - \overset{3}{H}\alpha \overset{1}{p}\delta_{\alpha\beta} \right) n_\beta \delta \psi_\alpha ds \end{aligned} \quad (4.95b)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_A G \overset{3}{H} \left( \psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B\psi_{\gamma,\gamma\beta} \delta_{\alpha\beta} - \overset{3}{H} \alpha \overset{1}{p}_{,\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) \delta \psi_{\alpha} dA \\
& = \oint_A \overset{1}{m}_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta \psi_{\alpha} ds - \int_A G \overset{3}{H} \left( \psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B\psi_{\gamma,\gamma\alpha} - \overset{3}{H} \alpha \overset{1}{p}_{,\alpha} \right) \delta \psi_{\alpha} dA \\
& \quad \int_A \overset{3}{H} \left( \beta \psi_{\alpha} - b \overset{1}{p}_{,\alpha} \right) \delta \overset{1}{p}_{,\alpha} dA \\
& = \oint_s \overset{3}{H} \left( \beta \psi_{\alpha} - b \overset{1}{p}_{,\alpha} \right) n_{\alpha} \delta \overset{1}{p} ds - \int_A \overset{3}{H} \left( \beta \psi_{\alpha,\alpha} - b \overset{1}{p}_{,\alpha\alpha} \right) \delta \overset{1}{p} dA \\
& = - \oint_s \overset{1}{r}_{\alpha} n_{\alpha} \delta \overset{1}{p} ds - \int_A \overset{3}{H} \left( \beta \psi_{\alpha,\alpha} - b \overset{1}{p}_{,\alpha\alpha} \right) \delta \overset{1}{p} dA.
\end{aligned} \tag{4.95c}$$

Die durch die partielle Integration entstandenen Ausdrücke werden in das Variationsprinzip eingesetzt und nach den Wichtungsfunktionen  $\delta w$ ,  $\delta \psi_{\alpha}$  und  $\delta \overset{1}{p}$  sortiert. Die Randintegrale über  $ds$  heben sich gegenseitig auf.

Da die Variationen der primären Variablen als unabhängig angenommen werden, erhält man ein System von Differentialgleichungen für die Platte

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + h(\beta \overset{1}{p} + Jw) = -hF_3^0 - \Sigma P_3 \tag{4.96a}$$

$$Gh(\psi_{\alpha} + w_{,\alpha}) - G \overset{3}{H} (\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B\psi_{\gamma,\gamma\alpha}) - \overset{3}{H} J \psi_{\alpha} + \overset{3}{H} (\alpha - \beta) \overset{1}{p}_{,\alpha} = 0 \tag{4.96b}$$

$$\overset{3}{H} \left( \frac{\phi^2}{R} \overset{1}{p} + \overset{3}{H} (\alpha - \beta) \psi_{\alpha,\alpha} + \overset{3}{H} b \overset{1}{p}_{,\alpha\alpha} \right) + h(\beta w - b \overset{1}{p}) = \frac{\Delta P_Q}{i\omega}. \tag{4.96c}$$

Die Differentialgleichungen können auch wieder in Energieformulierungen überführt werden, die als Ausgangspunkt für die FEM dienen

$$\delta w : \int_A \left\{ -h(\beta \overset{1}{p} + Jw) \delta w + Gh(\psi_{\alpha} + w_{,\alpha}) \delta w_{,\alpha} \right\} dA = \int_A \left( \Sigma P_3 + hF_3^0 \right) \delta w dA \tag{4.97a}$$

$$\begin{aligned}
\delta \psi_{\alpha} : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_{\alpha} + w_{,\alpha}) - \overset{3}{H} (J\psi_{\alpha} + \beta \overset{1}{p}_{,\alpha}) \right] \delta \psi_{\alpha} \right. \\
\left. + \left[ G \overset{3}{H} (\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B\psi_{\gamma,\gamma\alpha}) - \overset{3}{H} \alpha \overset{1}{p}_{,\alpha} \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0
\end{aligned} \tag{4.97b}$$

$$\delta \overset{1}{p} : \int_A \left\{ \left[ \left( \overset{3}{H} \frac{\phi^2}{R} - hb \right) \overset{1}{p} + h\beta w + \overset{3}{H} \alpha \psi_{\alpha,\alpha} \right] \delta \overset{1}{p} + \overset{3}{H} (\beta \psi_{\alpha} - b \overset{1}{p}_{,\alpha}) \delta \overset{1}{p}_{,\alpha} \right\} dA \tag{4.97c}$$

$$= - \int_A \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^1 dA$$

Bei Betrachtung der Ansätze für die Scheibe

$$u_1(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) \quad (4.98)$$

$$u_2(x_1, x_2) = v(x_1, x_2)$$

$$u_3(x_1, x_2) = \Psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3 \quad (4.99)$$

$$p(x_1, x_2) = \overset{0}{p}(x_1, x_2)$$

wird wie bei der Platte zusätzlich zu den Freiwerten aus der elastischen Scheibentheorie (4.36), ein Porendruckfreiwert berücksichtigt. Die Arbeitsgleichung für die Scheibengrößen lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ \left( 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} u_{,1} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (v_{,2} + \Psi_3) - h\alpha \overset{0}{p} \right) \delta u_{,1} + Gh(u_{,2} + v_{,1}) \delta u_{,2} - \left( hJu + h\overset{0}{F}_1 + \beta \overset{0}{p}_{,1} \right) \delta u \right. \\ & + \left( 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} v_{,2} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,1} + \Psi_3) - h\alpha \overset{0}{p} \right) \delta v_{,2} + Gh(v_{,1} + u_{,2}) \delta v_{,1} - \left( hJv - h\overset{0}{F}_2 + \beta \overset{0}{p}_{,2} \right) \delta v \\ & + \left( 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Psi_3 + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,1} + v_{,2}) - \overset{3}{H} J \Psi_3 \right) \delta \Psi_3 + \frac{Gh^3}{12} (\Psi_{3,1} \delta \Psi_{3,1} + \Psi_{3,2} \delta \Psi_{3,2}) \\ & + \left( h \frac{\phi^2}{R} \overset{0}{p} + h\alpha(u_{,1} + v_{,2} + \Psi_3) \right) \delta \overset{0}{p} + \left( h\beta u - \frac{\overset{0}{p}_{,1}}{\omega^2 \rho_f} \right) \delta \overset{0}{p}_{,1} + \left( h\beta v - \frac{\overset{0}{p}_{,2}}{\omega^2 \rho_f} \right) \delta \overset{0}{p}_{,2} \Big\} dA \\ & = \int_A \Delta P_1 \delta u dA + \int_A \Delta P_2 \delta v dA - \int_A \frac{\Sigma P_Q}{i\omega} \delta \overset{0}{p} dA + \oint_s \left( \overset{0}{m}_{\alpha\beta} \delta u_{,\beta} + \overset{1}{m}_{\alpha 3} \delta \Psi_3 \right) n_{\alpha} ds - \oint_s \overset{1}{r}_{\alpha} \delta \overset{1}{p} n_{\alpha} ds . \end{aligned} \quad (4.100)$$

Gleichung (4.100) wird durch partielles Integrieren aller Terme, die eine Ableitung der Wichtungsfunktion enthalten und deren Einsetzen in die Variationsformulierung (4.100) in ein System aus 4 partiellen Differentialgleichungen umgeformt

$$2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} u_{,11} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (v_{,21} + \Psi_{3,1}) + Gh(u_{,21} + v_{,12}) + hJu + \beta \overset{0}{p}_{,1} = -\Delta P_1 - h\overset{0}{F}_1 \quad (4.101a)$$

$$2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} v_{,22} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,12} + \Psi_{3,2}) + Gh(v_{,12} + u_{,21}) + hJv + \beta \overset{0}{p}_{,2} = -\Delta P_2 - h\overset{0}{F}_2 \quad (4.101b)$$

$$\frac{Gh^3}{12} (\Psi_{3,11} + \Psi_{3,22}) - 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Psi_3 - 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,1} + v_{,2}) + \overset{3}{H} J \Psi_3 = 0 \quad (4.101c)$$



$$h \frac{\phi^2}{R} p + h\alpha(u_{,1} + v_{,2} + \psi_3) - (h\beta u_{,1} - \frac{p_{,11}}{\omega^2 \rho_f}) - (h\beta v_{,2} - \frac{p_{,22}}{\omega^2 \rho_f}) = \frac{\Sigma P_Q}{i\omega}. \quad (4.101d)$$

Die Variationsformulierung für die einzelnen Differentialgleichungen lautet

$$\begin{aligned} \delta u : \int_A \left\{ \left( 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} u_{,1} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (v_{,2} + \psi_3) - h\alpha p \right) \delta u_{,1} \right. \\ \left. + Gh(u_{,2} + v_{,1}) \delta u_{,2} - (hJu + \beta p_{,1}) \delta u \right\} dA = \int_A (\Delta P_1 + hF_1^0) \delta u dA \end{aligned} \quad (4.102a)$$

$$\begin{aligned} \delta v : \int_A \left\{ \left( 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} v_{,2} + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,1} + \psi_3) - h\alpha p \right) \delta v_{,2} \right. \\ \left. + Gh(v_{,1} + u_{,2}) \delta v_{,1} - (hJv + \beta p_{,2}) \delta v \right\} dA = \int_A (\Delta P_2 + hF_2^0) \delta v dA \end{aligned} \quad (4.102b)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_3 : \int_A \left\{ \left( \frac{3}{H} \omega^2 (\rho - \beta \rho_f) \psi_3 - h\alpha p + 2Gh \frac{1-\nu}{1-2\nu} \psi_3 + 2Gh \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{,1} + v_{,2}) - \frac{3}{H} J \psi_3 \right) \delta \psi_3 \right. \\ \left. + \frac{Gh^3}{12} (\psi_{3,1} \delta \psi_{3,1} + \psi_{3,2} \delta \psi_{3,2}) \right\} dA = 0 \end{aligned} \quad (4.102c)$$

$$\begin{aligned} \delta p^0 : \int_A \left\{ \left( h \frac{\phi^2}{R} p + h\alpha(u_{,1} + v_{,2} + \psi_3) \right) \delta p^0 + (h\beta u - \frac{p_{,1}}{\omega^2 \rho_f}) \delta p_{,1}^0 + (h\beta v - \frac{p_{,2}}{\omega^2 \rho_f}) \delta p_{,2}^0 \right\} dA \\ = - \int_A \frac{\Sigma P_Q}{i\omega} \delta p^0 dA. \end{aligned} \quad (4.102d)$$

Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf den Plattengleichungen liegt, werden auch die poroelastischen Scheibengleichungen hier nur für den linearen Verschiebungsansatz dargestellt.

### 4.2.2 Abbruch der Potenzreihe nach quadratischen Reihengliedern für die poroelastische Platte

Bei Abbruch der Reihe nach den quadratischen Reihengliedern

$$u_i(x_\alpha, x_3) = \overset{0}{u}_i(x_\alpha) + \overset{1}{u}_i(x_\alpha)x_3 + \overset{2}{u}_i(x_\alpha)x_3^2 = \sum_{l=0}^2 \overset{l}{u}_i(x_\alpha) \cdot x_3^l \quad (4.103)$$

$$p(x_\alpha, x_3) = \overset{0}{p}(x_\alpha) + \overset{1}{p}(x_\alpha)x_3 + \overset{2}{p}(x_\alpha)x_3^2 = \sum_{l=0}^2 \overset{l}{p}(x_\alpha) \cdot x_3^l$$

entsteht der vollständige quadratische poroelastische Verschiebungsansatz

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) + \psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + u_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) + \psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 + v_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + \psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3 + w_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ p(x_1, x_2) &= \overset{0}{p}(x_1, x_2) + \overset{1}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3 + \overset{2}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3^2. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Auch hier gelten für die Spannungen und Verzerrungen dieselben Annahmen wie im elastischen Fall. Zusätzlich zu den mit dem elastischen Fall identischen Ansätzen für die Verschiebung, wird wiederum der Porendruck berücksichtigt. Auch hier können Scheiben und Plattengleichungen entkoppelt werden. Es werden nur die Plattengleichungen mit den folgenden Freiwerten näher betrachtet

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_2(x_1, x_2) &= \psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + w_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ p(x_1, x_2) &= \overset{1}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Das Energieprinzip kann wie folgt formuliert werden.

$$\begin{aligned}
& \int_A \left\{ \left[ -h(\beta p^1 + Jw - \overset{3}{H}Jw_d) - hF_3^0 - \overset{3}{H}F_3^2 \right] \delta w + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{3}{G}Hw_{d,\alpha} \right] \delta w_{,\alpha} \right. \\
& + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \overset{3}{H} \left( J\psi_\alpha + \beta p^1_{,\alpha} + Gw_{d,\alpha} \right) \right] \delta \psi_\alpha \\
& + \left[ \overset{3}{G}H \left( \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d \delta_{\alpha\beta} \right) - \overset{3}{H}\alpha p^1_{\alpha\beta} \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \\
& + \left[ \left( \overset{3}{H} \frac{\phi^2}{R} - hb \right) p^1 + h\beta w + \overset{3}{H} \left( \alpha \psi_{\alpha,\alpha} + Nw_d \right) \right] \delta p^1 + \overset{3}{H} \left[ \beta \psi_\alpha - b p^1_{,\alpha} \right] \delta p^1_{,\alpha} \\
& + \left[ \overset{3}{H} \left( -Jw + N p^1 + 2G(B\psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) \right) - \overset{5}{H}Jw_d - \overset{3}{H}F_3^0 - \overset{5}{H}F_3^2 \right] \delta w_d \\
& \left. + G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}w_{d,\alpha} \right] \delta w_{d,\alpha} \right\} dA = \int_A \left[ \Sigma P_3 \delta w + \frac{h^2}{4} \Sigma P_3 \delta w_d - \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^1 \right] dA.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Diese Gleichung kann durch partielle Integration der Ausdrücke, die Ableitungen der Wichtungsfunktion enthalten in ein Differentialgleichungssystem aus 5 Gleichungen und 5 Unbekannten überführt werden. Zusätzlich zu (4.95) werden folgende partiellen Integrationen durchgeführt

$$\int_A \overset{3}{G}Hw_{d,\alpha} \delta w_{,\alpha} dA = \oint_s \overset{3}{G}Hw_{d,\alpha} n_\alpha \delta w ds - \int_A \overset{3}{G}Hw_{d,\alpha\alpha} \delta w dA \tag{4.107a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A \overset{3}{G}H2Bw_d \delta_{\alpha\beta} \delta \psi_{\alpha,\beta} dA = \oint_s \overset{3}{G}H2Bw_d \delta_{\alpha\beta} n_\beta \delta \psi_\alpha ds - \int_A \overset{3}{G}H2Bw_{d,\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta \psi_\alpha dA \\
& = \oint_s \overset{3}{G}H2Bw_d \delta_{\alpha\beta} n_\beta \delta \psi_\alpha ds - \int_A \overset{3}{G}H2Bw_{d,\alpha} \delta \psi_\alpha dA
\end{aligned} \tag{4.107b}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}w_{d,\alpha} \right] \delta w_{d,\alpha} dA = \oint_s G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}w_{d,\alpha} \right] n_\alpha \delta w ds \\
& - \int_A G \left[ \overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + \overset{5}{H}w_{d,\alpha\alpha} \right] \delta w_d dA,
\end{aligned} \tag{4.107c}$$

wodurch ein Differentialgleichungssystem bestehend aus 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten entsteht

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + \overset{3}{G}Hw_{d,\alpha\alpha} + h(\beta p^1 + Jw) + \overset{3}{H}Jw_d = -hF_3^0 - \overset{3}{H}F_3^2 - \Sigma P_3 \tag{4.108a}$$

$$\begin{aligned}
& Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \overset{3}{G}\overset{3}{H}(\psi_{\beta,\alpha\beta} + \psi_{\alpha,\beta\beta} + B\psi_{\gamma,\gamma\alpha} + (2B-1)w_{d,\alpha}) \\
& - \overset{3}{H}J\psi_\alpha + \overset{3}{H}(\alpha - \beta)p_{,\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{4.108b}$$

$$\overset{3}{H} \left( \frac{\phi^2}{R} p + \overset{3}{H}(\alpha - \beta)\psi_{\alpha,\alpha} + \overset{3}{H}bp_{,\alpha} + \overset{1}{N}w_d \right) + h(\beta w - bp) = \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \tag{4.108c}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{3}{G}\overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha} - 2B\psi_{\alpha,\alpha} - 4Cw_d) - \overset{3}{H}\overset{1}{N}p + \overset{5}{G}\overset{5}{H}w_{d,\alpha\alpha} \\
& + J(\overset{3}{H}w + \overset{5}{H}w_d) = -\overset{3}{H}\overset{0}{F}_3 - \overset{5}{H}\overset{2}{F}_3 - \frac{h^2}{4}\Sigma P_3.
\end{aligned} \tag{4.108d}$$

Die zur Anwendung der FEM benötigte Variationsformulierung lautet

$$\delta w : \int_A \left\{ \left[ -h(\beta p + Jw) - \overset{3}{H}Jw_d \right] \delta w + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{3}{G}\overset{3}{H}w_{d,\alpha} \right] \delta w_{,\alpha} \right\} dA = \int_A \left( \Sigma P_3 + h\overset{0}{F}_3 + \overset{3}{H}\overset{2}{F}_3 \right) \delta w dA \tag{4.109a}$$

$$\begin{aligned}
\delta \psi_\alpha : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \overset{3}{H} \left( J\psi_\alpha + \beta p_{,\alpha} + Gw_{d,\alpha} \right) \right] \delta \psi_\alpha \right. \\
\left. + \left[ \overset{3}{G}\overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) - \overset{3}{H}\alpha p\delta_{\alpha\beta} \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0
\end{aligned} \tag{4.109b}$$

$$\begin{aligned}
\delta p : \int_A \left\{ \left[ \left( \overset{3}{H}\frac{\phi^2}{R} - hb \right) p + h\beta w + \overset{3}{H} \left( \alpha\psi_{\alpha,\alpha} + \overset{1}{N}w_d \right) \right] \delta p + \overset{3}{H}(\beta\psi_\alpha - bp_{,\alpha}) \delta p_{,\alpha} \right\} dA \\
= - \int_A \frac{P_Q}{i\omega} \delta p dA
\end{aligned} \tag{4.109c}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_d : \int_A \left\{ \left[ \overset{3}{H} \left( -Jw + \overset{1}{N}p + 2G(B\psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) \right) - \overset{5}{H}Jw_d \right] \delta w_d \right. \\
\left. + G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}w_{d,\alpha} \right] \delta w_{d,\alpha} \right\} dA = \int_A \left( \frac{h^2}{4}\Sigma P_3\overset{3}{H} + \overset{0}{F}_3 + \overset{5}{H}\overset{2}{F}_3 \right) \delta w_d dA.
\end{aligned} \tag{4.109d}$$

### 4.2.3 Abbruch der Potenzreihe nach kubischen Reihengliedern für die poroelastische Platte

Bei Abbruch der Potenzreihe nach kubischen Reihengliedern

$$u_i(x_\alpha, x_3) = \overset{0}{u}_i(x_\alpha) + \overset{1}{u}_i(x_\alpha)x_3 + \overset{2}{u}_i(x_\alpha)x_3^2 + \overset{3}{u}_i(x_\alpha)x_3^3 = \sum_{l=0}^3 \overset{l}{u}_i(x_\alpha) \cdot x_3^l \quad (4.110)$$

$$p(x_\alpha, x_3) = \overset{0}{p}(x_\alpha) + \overset{1}{p}(x_\alpha)x_3 + \overset{2}{p}(x_\alpha)x_3^2 + \overset{3}{p}(x_\alpha)x_3^3 = \sum_{l=0}^3 \overset{l}{p}(x_\alpha) \cdot x_3^l$$

entstehen Ansätze dritter Ordnung

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2) + \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + u_d(x_1, x_2) + \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_2(x_1, x_2) &= v(x_1, x_2) + \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 + v_d(x_1, x_2) + \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + \Psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3 + w_d(x_1, x_2) + \Psi_3(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ p(x_1, x_2) &= \overset{0}{p}(x_1, x_2) + \overset{1}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3 + \overset{2}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3^2 + \overset{3}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3^3. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Auch bei diesem Ansatz können die Scheiben- und die Plattengleichungen getrennt betrachtet werden.

Für eine Platte mit kubischem Ansatz können sich die Querschnitte bei der Verformung der Platte verformen, was durch die zusätzliche Berücksichtigung der Verformungen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  verursacht wird. Auch für den Porendruck tritt ein zusätzlicher Freiwert  $\overset{3}{p}$  auf. Die Ansätze für die Plattengrößen dritter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + \Psi_1(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_2(x_1, x_2) &= \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3 + \Psi_2(x_1, x_2) \cdot x_3^3 \\ u_3(x_1, x_2) &= w(x_1, x_2) + w_d(x_1, x_2) \cdot x_3^2 \\ p(x_1, x_2) &= \overset{1}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3 + \overset{3}{p}(x_1, x_2) \cdot x_3^3. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Im Gegensatz zum linearen und quadratischen Verschiebungsansatz entsprechen die Spannungen dem Gleichgewicht am differentiellen poroelastischen Würfel, d.h.

- die Querschubspannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$  sind über die Höhe quadratisch verteilt,
- die Normalspannung  $\sigma_{33}$  verläuft kubisch über die Höhe.

Die Gleichung für das entsprechende Variationsprinzip lautet

$$\begin{aligned}
& \int_A \left\{ \left[ -h(\beta \overset{1}{p} + Jw) - \overset{3}{H}(3\beta \overset{3}{p} + Jw_d) - h\overset{0}{F}_3 - \overset{3}{H}\overset{2}{F}_3 \right] \delta w + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{,\alpha} \right. \\
& + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{3}{H} \left( -(J\Psi_\alpha + \beta \overset{1}{p}_{,\alpha}) + G(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) \right) - \overset{5}{H}(J\Psi_\alpha + \beta \overset{3}{p}_{,\alpha}) \right] \delta \psi_\alpha \\
& + \left[ G\overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) - \overset{3}{H}\alpha \overset{1}{p}\delta_{\alpha\beta} \right. \\
& + G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) - \overset{5}{H}\alpha \overset{3}{p}\delta_{\alpha\beta} \left. \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \\
& + \left[ \left( \overset{3}{H}\frac{\phi^2}{R} - hb \right) \overset{1}{p} + \left( \overset{5}{H}\frac{\phi^2}{R} - 3\overset{3}{H}b \right) \overset{3}{p} + h\beta w + \overset{3}{H} \left( \alpha \psi_{\alpha,\alpha} + \overset{1}{N}w_d \right) + \overset{5}{H}\alpha \Psi_{\alpha,\alpha} \right] \delta \overset{1}{p} \\
& + \left[ \overset{3}{H} \left( \beta \psi_\alpha - b \overset{1}{p}_{,\alpha} \right) + \overset{5}{H} \left( \beta \Psi_\alpha - b \overset{3}{p}_{,\alpha} \right) \right] \delta \overset{1}{p}_{,\alpha} \\
& + \left[ \overset{3}{H} \left( -Jw + \overset{1}{N}\overset{1}{p} + 2G(B\Psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) \right) + \overset{5}{H} \left( -Jw_d + \overset{2}{N}\overset{3}{p} + 2GB\Psi_{\alpha,\alpha} \right) - \overset{3}{H}\overset{0}{F}_3 - \overset{5}{H}\overset{2}{F}_3 \right] \delta w_d \\
& + G \left[ \overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{d,\alpha} \\
& + \left[ 3G\overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H} \left( -J\Psi_\alpha + \beta \overset{1}{p}_{,\alpha} + G(9\Psi_\alpha + 3w_{d,\alpha}) \right) - \overset{7}{H}(J\Psi_\alpha + \beta \overset{3}{p}_{,\alpha}) \right] \delta \Psi_\alpha \\
& + \left[ G\overset{5}{H}(\psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) - \overset{5}{H}\alpha \overset{1}{p}\delta_{\alpha\beta} \right. \\
& + G\overset{7}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) - \overset{7}{H}\alpha \overset{3}{p}\delta_{\alpha\beta} \left. \right] \delta \Psi_{\alpha,\beta} \\
& + \left[ \left( \overset{5}{H}\frac{\phi^2}{R} - 3\overset{3}{H}b \right) \overset{1}{p} + \left( \overset{7}{H}\frac{\phi^2}{R} - 9\overset{5}{H}b \right) \overset{3}{p} + 3\overset{3}{H}\beta w + \overset{5}{H} \left( \alpha \psi_{\alpha,\alpha} + \overset{2}{N}w_d \right) + \overset{7}{H}\alpha \Psi_{\alpha,\alpha} \right] \delta \overset{3}{p} \\
& + \left[ \overset{5}{H} \left( \beta \psi_\alpha - b \overset{1}{p}_{,\alpha} \right) + \overset{7}{H} \left( \beta \Psi_\alpha - b \overset{3}{p}_{,\alpha} \right) \right] \delta \overset{3}{p}_{,\alpha} \left. \right\} dA \\
& = \int_A \left( \Sigma P_3 \delta w + \frac{h^2}{4} \Sigma P_3 \delta w_d - \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta \overset{1}{p} - \frac{h^2}{4} \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta \overset{3}{p} \right) dA.
\end{aligned}$$

(4.113)

Zusätzlich zu (4.95) werden folgende partiellen Integrationen durchgeführt

$$\int_A G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \delta w_{,\alpha} dA = \oint_s G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) n_\alpha \delta w ds - \int_A G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) \delta w dA$$

(4.114a)

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[ 2\overset{3}{GH}Bw_d\delta_{\alpha\beta} + \overset{5}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta\Psi_{\alpha,\beta} dA \\
&= \oint_s \left[ \overset{3}{GH}2Bw_d\delta_{\alpha\beta} + \overset{5}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] n_\beta \delta\Psi_\alpha ds \\
&- \int_A \left[ \overset{3}{GH}2Bw_{d,\alpha} + \overset{5}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) \right] \delta\Psi_\alpha dA
\end{aligned} \tag{4.114b}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A \overset{5}{H}(\beta\Psi_\alpha - b\overset{3}{p}_{,\alpha}) \delta p dA \\
&= \oint_s \overset{5}{H}(\beta\Psi_\alpha - b\overset{3}{p}_{,\alpha}) n_\alpha \delta p ds - \int_A \overset{5}{H}(\beta\Psi_{\alpha,\alpha} - b\overset{3}{p}_{,\alpha\alpha}) \delta p dA \\
&= - \oint_s \overset{1}{r}_\alpha n_\alpha \delta p ds - \int_A \overset{5}{H}(\beta\Psi_{\alpha,\alpha} - b\overset{3}{p}_{,\alpha\alpha}) \delta p dA
\end{aligned} \tag{4.114c}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A G \left[ \overset{3}{H}(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{d,\alpha} dA = \oint_s G \left[ \overset{3}{H}(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{5}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] n_\alpha \delta w_d ds \\
&- \int_A G \left[ \overset{3}{H}(\Psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + \overset{5}{H}(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) \right] \delta w_d dA
\end{aligned} \tag{4.114d}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[ \overset{5}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + (B\Psi_{\gamma,\gamma} + 2Bw_d)\delta_{\alpha\beta}) + \overset{7}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] \delta\Psi_{\alpha,\beta} dA \\
&= \oint_s \left[ \overset{5}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + (B\Psi_{\gamma,\gamma} + 2Bw_d)\delta_{\alpha\beta}) + \overset{7}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \right] n_\beta \delta\Psi_\alpha ds \\
&- \int_A \left[ \overset{5}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) + \overset{7}{GH}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) \right] \delta\Psi_\alpha dA
\end{aligned} \tag{4.114e}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[ \overset{5}{H}(\beta\Psi_\alpha - b\overset{1}{p}_{,\alpha}) + \overset{7}{H}(\beta\Psi_\alpha - b\overset{3}{p}_{,\alpha}) \right] \delta\overset{3}{p}_{,\alpha} dA \\
&= \oint_s \left[ \overset{5}{H}(\beta\Psi_\alpha - b\overset{1}{p}_{,\alpha}) + \overset{7}{H}(\beta\Psi_\alpha - b\overset{3}{p}_{,\alpha}) \right] n_\alpha \delta\overset{3}{p} ds - \int_A \left[ \overset{5}{H}(\beta\Psi_{\alpha,\alpha} - b\overset{1}{p}_{,\alpha\alpha}) + \overset{7}{H}(\beta\Psi_{\alpha,\alpha} - b\overset{3}{p}_{,\alpha\alpha}) \right] \delta\overset{1}{p} dA \\
&= - \oint_s \overset{3}{r}_\alpha n_\alpha \delta\overset{3}{p} ds - \int_A \left[ \overset{5}{H}(\beta\Psi_{\alpha,\alpha} - b\overset{1}{p}_{,\alpha\alpha}) + \overset{7}{H}(\beta\Psi_{\alpha,\alpha} - b\overset{3}{p}_{,\alpha\alpha}) \right] \delta\overset{3}{p} dA
\end{aligned} \tag{4.114f}$$

Das Differentialgleichungssystem besteht nun aus insgesamt 8 Gleichungen mit 8 Unbekannten. Diese Formulierung beschreibt das Verhalten dickerer Platten sehr gut, ohne dass zusätzliche Annahmen getroffen werden müssen und somit Widersprüche zu den Gesetzen der Mechanik entstehen. Allerdings ist durch die größere Anzahl der Unbekannten der Rechenaufwand erheblich gestiegen. Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} Gh(\Psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) + h(\overset{1}{\beta}p + Jw) + \overset{3}{H}(Jw_d + 3\overset{3}{\beta}p) \\ = -h\overset{0}{F}_3 - \overset{3}{H}\overset{2}{F}_3 - \Sigma P_3 \end{aligned} \quad (4.115a)$$

$$\begin{aligned} Gh(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) - G\overset{3}{H}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) \\ - G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) - J(\overset{3}{H}\Psi_\alpha - \overset{5}{H}\Psi_\alpha) + \overset{3}{H}(\alpha - \beta)\overset{1}{p}_{,\alpha} + \overset{5}{H}(\alpha - \beta)\overset{3}{p}_{,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4.115b)$$

$$\begin{aligned} \left(\overset{3}{H}\frac{\phi^2}{R} - hb\right)\overset{1}{p} + \left(\overset{5}{H}\frac{\phi^2}{R} - 3\overset{3}{H}b\right)\overset{3}{p} + \overset{3}{H}\left((\alpha - \beta)\Psi_{\alpha,\alpha} + \overset{1}{N}w_d\right) \\ + \overset{5}{H}(\alpha - \beta)\Psi_{\alpha,\alpha} + h\beta w + \overset{3}{H}\overset{1}{p} + \overset{5}{H}\overset{3}{p} = \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \end{aligned} \quad (4.115c)$$

$$\begin{aligned} G\overset{3}{H}(\Psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + G\overset{5}{H}(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) - G\overset{3}{H}(2B\Psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) \\ - \overset{3}{H}\overset{1}{N}\overset{1}{p} - \overset{5}{H}\overset{2}{N}\overset{3}{p} - 2G\overset{5}{H}B\Psi_{\alpha,\alpha} + J(\overset{3}{H}w + \overset{5}{H}w_d) = -\overset{3}{H}\overset{0}{F}_3 - \overset{5}{H}\overset{2}{F}_3 - \frac{h^2}{4}\Sigma P_3 \end{aligned} \quad (4.115d)$$

$$\begin{aligned} 3G\overset{3}{H}(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{5}{H}(9\Psi_\alpha + 3w_{d,\alpha}) - G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) \\ - G\overset{7}{H}(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + B\Psi_{\gamma,\gamma\alpha}) - J(\overset{5}{H}\Psi_\alpha + \overset{7}{H}\Psi_\alpha) + \overset{5}{H}(\alpha - \beta)\overset{1}{p}_{,\alpha} + \overset{7}{H}(\alpha - \beta)\overset{3}{p}_{,\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (4.115e)$$

$$\begin{aligned} \left(\overset{5}{H}\frac{\phi^2}{R} - 3\overset{3}{H}b\right)\overset{1}{p} + \left(\overset{7}{H}\frac{\phi^2}{R} - 9\overset{5}{H}b\right)\overset{3}{p} + 3\overset{3}{H}\beta w + \overset{5}{H}\left((\alpha - \beta)\Psi_{\alpha,\alpha} + \overset{2}{N}w_d\right) \\ + \overset{7}{H}(\alpha - \beta)\Psi_{\alpha,\alpha} + \overset{5}{H}\overset{1}{p}_{,\alpha\alpha} + \overset{7}{H}\overset{3}{p}_{,\alpha\alpha} = \frac{h^2}{4}\frac{\Delta P_Q}{i\omega} \end{aligned} \quad (4.115f)$$

Die Randintegrale über  $ds$  aus Gleichung (4.115) ergeben zusammen mit den Randintegralen aus (4.95) die Reihenentwicklung einzelner Spannungsresultanten, wenn die Reihe nach kubischen Gliedern abgebrochen wird. Die zur Anwendung der FEM benötigte Variationsformulierung lautet

$$\delta w : \int_A \left\{ \left[ -h(\overset{1}{\beta}p + Jw) - \overset{3}{H}(3\overset{3}{\beta}p + Jw_d) \right] \right\} \delta w \quad (4.116a)$$



$$\begin{aligned}
& + \left[ Gh(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{,\alpha} \Big\} dA = \int_A \left( \Sigma P_3 + h\overset{0}{F}_3 + \overset{3}{H}\overset{2}{F}_3 \right) \delta w_d dA \\
\delta \Psi_\alpha : & \int_A \left\{ \left[ Gh(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{3}{H} \left( -(J\Psi_\alpha + \beta p_{,\alpha}^1) + G(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) \right) - \overset{5}{H}(J\Psi_\alpha + \beta p_{,\alpha}^3) \right] \delta \Psi_\alpha \right. \\
& \left. + \left[ G\overset{3}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) - \overset{3}{H}\alpha p^1\delta_{\alpha\beta} \right. \right. \\
& \left. \left. + G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) - \overset{5}{H}\alpha p^3\delta_{\alpha\beta} \right] \delta \Psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0
\end{aligned} \tag{4.116b}$$

$$\begin{aligned}
\delta p^1 : & \int_A \left\{ \left[ \left( \overset{3}{H}\frac{\phi^2}{R} - hb \right) p^1 + \left( \overset{5}{H}\frac{\phi^2}{R} - 3\overset{3}{H}b \right) p^3 + h\beta w + \overset{3}{H} \left( \alpha\Psi_{\alpha,\alpha} + \overset{1}{N}w_d \right) + \overset{5}{H}\alpha\Psi_{\alpha,\alpha} \right] \delta p^1 \right. \\
& \left. + \left[ \overset{3}{H}(\beta\Psi_\alpha - b p_{,\alpha}^1) + \overset{5}{H}(\beta\Psi_\alpha - b p_{,\alpha}^3) \right] \delta p_{,\alpha}^1 \right\} dA = - \int_A \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^1 dA
\end{aligned} \tag{4.116c}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_d : & \int_A \left\{ \left[ \overset{3}{H} \left( -Jw + \overset{1}{N}p^1 + 2G(B\Psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) \right) + \overset{5}{H} \left( -Jw_d + \overset{2}{N}p^3 + 2GB\Psi_{\alpha,\alpha} \right) \right] \delta w_d \right. \\
& \left. + \left[ G\overset{3}{H}(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{5}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{d,\alpha} \right\} dA = \int_A \left( \frac{h^2}{4}\Sigma P_3 + \overset{3}{H}\overset{0}{F}_3 + \overset{5}{H}\overset{2}{F}_3 \right) \delta w_d dA
\end{aligned} \tag{4.116d}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Psi_\alpha : & \int_A \left\{ \left[ 3G\overset{3}{H}(\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{5}{H}(9\Psi_\alpha + 3w_{d,\alpha}) + \overset{5}{H} \left( -J\Psi_\alpha + \beta p_{,\alpha}^1 \right) - \overset{7}{H} \left( J\Psi_\alpha + \beta p_{,\alpha}^3 \right) \right] \delta \Psi_\alpha \right. \\
& \left. + \left[ G\overset{5}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_d\delta_{\alpha\beta}) - \overset{5}{H}\alpha p^1\delta_{\alpha\beta} \right. \right. \\
& \left. \left. + G\overset{7}{H}(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + B\Psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) - \overset{7}{H}\alpha p^3\delta_{\alpha\beta} \right] \delta \Psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0
\end{aligned} \tag{4.116e}$$

$$\begin{aligned}
\delta p^3 : & \int_A \left\{ \left[ \left( \overset{5}{H}\frac{\phi^2}{R} - 3\overset{3}{H}b \right) p^1 + \left( \overset{7}{H}\frac{\phi^2}{R} - 9\overset{5}{H}b \right) p^3 + 3\overset{3}{H}\beta w + \overset{5}{H} \left( \alpha\Psi_{\alpha,\alpha} + \overset{2}{N}w_d \right) + \overset{7}{H}\alpha\Psi_{\alpha,\alpha} \right] \delta p^3 \right. \\
& \left. + \left[ \overset{5}{H}(\beta\Psi_\alpha - b p_{,\alpha}^1) + \overset{7}{H}(\beta\Psi_\alpha - b p_{,\alpha}^3) \right] \delta p_{,\alpha}^3 \right\} dA = 0
\end{aligned} \tag{4.116f}$$

$$+ \left[ \frac{5}{H} \left( \beta \psi_\alpha - b p_{,\alpha}^1 \right) + \frac{7}{H} \left( \beta \Psi_\alpha - b p_{,\alpha}^3 \right) \right] \delta p_{,\alpha}^3 \Bigg\} dA = - \int_A \frac{h^2}{4} \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^3 dA.$$

#### 4.2.4 Herleitung einer poroelastischen Plattentheorie nach der Methode von Kienzler

Die in Kapitel 4.2.3 beschriebene Vorgehensweise zur Herleitung von Plattentheorien kann auch zur Entwicklung einer poroelastischen Plattentheorie genutzt werden.

Die Reihenentwicklung sowohl für die elastischen als auch für die poroelastischen Reihenglieder wird nach einer bestimmten Potenz der Plattendicke abgebrochen. Die Reihenentwicklung erfolgt analog zu Gleichung (4.63) und wird in die Gleichung für das variierte Potential eines poroelastischen Kontinuums (4.8) eingesetzt. Werden alle Terme, ab  $h^2$  vernachlässigt, entsteht folgendes Differentialgleichungssystem

$$Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + h(\beta p^1 + Jw) = -\Sigma P_3 - F_3^0 \quad (4.117a)$$

$$Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) = 0 \quad (4.117b)$$

$$h(\beta w - b p^1) = \frac{\Delta P_Q}{i\omega}. \quad (4.117c)$$

Wird die Reihe erst ab der Potenz  $h^4$  abgebrochen entsteht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Gh(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha\alpha} + 3\Psi_{\alpha,\alpha}) + h(\beta p^1 + Jw) + \overset{3}{H}(Jw_d + 3\beta p^3) \\ = -hF_3^0 - \overset{3}{H}F_3^2 - \Sigma P_3 \end{aligned} \quad (4.118a)$$

$$\begin{aligned} Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + G\overset{3}{H}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha)G\overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\beta\beta} + \psi_{\beta,\alpha\beta} + B\psi_{\gamma,\gamma\alpha} + 2Bw_{d,\alpha}) \\ - J\overset{3}{H}\psi_\alpha + \overset{3}{H}(\alpha - \beta)p_{,\alpha}^1 = 0 \end{aligned} \quad (4.118b)$$

$$\left( \overset{3}{H} \frac{\Phi^2}{R} - hb \right) p^1 - 3\overset{3}{H}bp^3 + \overset{3}{H} \left( (\alpha - \beta)\psi_{\alpha,\alpha} + Nw_d \right) + h\beta w + \overset{3}{H}p^1 = \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \quad (4.118c)$$

$$G\overset{3}{H}(\psi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}) - G\overset{3}{H}(2B\psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) - \overset{3}{H}Np^1 + J\overset{3}{H}w = -\overset{3}{H}F_3^0 - \frac{h^2}{4}\Sigma P_3 \quad (4.118d)$$

$$3G\overset{3}{H}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) = 0 \quad (4.118e)$$

$$3\overset{3}{H}bp^1 - 3\overset{3}{H}\beta w = \frac{h^2}{4} \frac{\Delta P_Q}{i\omega}. \quad (4.118f)$$

Das in Einzelgleichungen zerlegte zugehörige Energieprinzip hat die Form

$$\begin{aligned} \delta w : \int_A \left\{ \left[ -h(\beta^1 p + Jw) - \overset{3}{H}(3\beta^3 p + Jw_d) \right] \delta w + \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{3}{GH}(w_{d,\alpha} + 3\Psi_\alpha) \right] \delta w_{,\alpha} \right\} dA \\ = \int_A \left( \overset{0}{\Sigma P_3} + h\overset{0}{F_3} + \overset{3}{H}\overset{2}{F_3} \right) \delta w dA \end{aligned} \quad (4.119a)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_\alpha : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) + \overset{3}{H} \left( -(J\psi_\alpha + \beta^1_{,\alpha}) + G(3\Psi_\alpha + w_{d,\alpha}) \right) \right] \delta \psi_\alpha \right. \\ \left. + \left[ \overset{3}{GH}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + B\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2Bw_{d,\alpha}\delta_{\alpha\beta}) - \overset{3}{H}\alpha^1 p \delta_{\alpha\beta} \right] \delta \psi_{\alpha,\beta} \right\} dA = 0 \end{aligned} \quad (4.119b)$$

$$\begin{aligned} \delta p^1 : \int_A \left\{ \left[ \left( \overset{3}{H}\frac{\phi^2}{R} - hb \right) p - 3\overset{3}{H}b\beta^3 p + h\beta w + \overset{3}{H} \left( \alpha\psi_{\alpha,\alpha} + \overset{1}{N}w_d \right) \right] \delta p^1 \right. \\ \left. + \overset{3}{H} \left( \beta\psi_\alpha - b^1_{p,\alpha} \right) \delta p^1_{,\alpha} \right\} dA = - \int_A \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^1 dA \end{aligned} \quad (4.119c)$$

$$\begin{aligned} \delta w_d : \int_A \left\{ \left[ \overset{3}{H} \left( -Jw + \overset{1}{N}p + 2G(B\psi_{\alpha,\alpha} + 4Cw_d) \right) \right] \delta w_d \right. \\ \left. + \overset{3}{GH}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \delta w_{d,\alpha} \right\} dA = \int_A \left( \frac{h^2}{4} \overset{0}{\Sigma P_3} + \overset{3}{H}\overset{0}{F_3} \right) \delta w dA \end{aligned} \quad (4.119d)$$

$$\delta \Psi_\alpha : \int_A \overset{3}{GH}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \delta \Psi_\alpha dA = 0 \quad (4.119e)$$

$$\delta p^3 : \int_A \left( -\overset{3}{H}b\beta^1 p + 3\overset{3}{H}\beta w \right) \delta p^3 dA = - \int_A \frac{h^2}{4} \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta p^3 dA. \quad (4.119f)$$

Die Herleitung poroelastischer Plattentheorien durch Entwicklung der Freiwerte eines dreidimensionalen poroelastischen Kontinuums in eine Potenzreihe bezüglich der Dickenkoordinate funktioniert auf dem selben Weg wie die Herleitung elastischer Plattentheorien. Zusätzlich zu den Freiwerten der elastischen Theorie erfolgt hier noch eine Reihenentwicklung für den Porendruck. Die Kraftgröße  $P_3$  der poroelastischen Theorie ist nicht identisch zur Elastizitätstheorie, da sie auch Komponenten aus der totalen Spannung enthalten kann. Durch unterschiedliche Auswertungsmethoden entstehen auch hier unterschiedliche Theorien.

## 5 Numerische Umsetzung

Nachdem in den vorigen Kapiteln die theoretischen Grundlagen für die Modellierung des poroelastischer Platten dargestellt wurden, wird nun die numerische Modellierung des Problems beschrieben; wobei die Finite-Element-Methode (FEM) zum Einsatz kommt.

Die in den Energieintegralen auftretenden unbekannten Feldgrößen (z.B. Verschiebungen) werden durch Ansatzfunktionen approximiert. Die Lösung des Gleichungssystems stellt eine Näherung dar und stimmt in der Regel nicht mit der exakten Lösung überein. Die Abweichung der Näherungslösung von der exakten Lösung, das Residuum, soll allerdings minimal sein.

### 5.1 Finite-Element-Formulierung für die poroelastische Platte

Im Kapitel 4.2 wurden bereits Arbeitsgleichungen für poroelastische Platten hergeleitet. Die Integralformulierung, die die Grundlage für die Weggrößenformulierung bildet, liegt also schon vor und kann Kapitel 4.2 entnommen werden.

#### 5.1.1 Abbruch der Reihenentwicklung nach linearen Reihengliedern

Wird die Reihenentwicklung nach linearen Gliedern abgebrochen entstehen folgende Arbeitsgleichungen für die poroelastische Platte

$$\delta w : \int_A \left\{ -h(\beta p^1 + Jw) \delta w + Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \delta w_{,\alpha} \right\} dA = \int_A (\Sigma P_3 + hF_3^0) \delta w dA \quad (5.1a)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_1 : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_1 + w_{,1}) - \overset{3}{H}(J\psi_1 + \beta p^1_{,1}) \right] \delta \psi_1 \right. \\ \left. + \left[ \overset{3}{GH} \left( (2+B)\psi_{1,1} + B\psi_{2,2} \right) - \overset{3}{H}\alpha p^1 \right] \delta \psi_{1,1} + \overset{3}{GH} (\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) \delta \psi_{1,2} \right\} dA = 0 \end{aligned} \quad (5.1b)$$

$$\delta \psi_2 : \int_A \left\{ \left[ Gh(\psi_2 + w_{,2}) - \overset{3}{H}(J\psi_2 + \beta p^1_{,2}) \right] \delta \psi_2 \right\} dA \quad (5.1c)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ GH^3 \left( (2+B)\psi_{2,2} + B\psi_{1,1} \right) - \overset{3}{H}\alpha \overset{1}{p} \right] \delta\psi_{1,1} + GH^3 (\psi_{2,1} + \psi_{1,2}) \delta\psi_{2,1} \Big\} dA = 0 \\
\delta \overset{1}{p} : \int_A \Big\{ \left[ \left( \overset{3}{H} \frac{\phi^2}{R} - hr \right) \overset{1}{p} + h\beta w + \overset{3}{H}\alpha \psi_{\alpha,\alpha} \right] \delta \overset{1}{p} + \overset{3}{H} \left( \beta \psi_{\alpha} - r \overset{1}{p}_{,\alpha} \right) \delta \overset{1}{p}_{,\alpha} \Big\} dA &= - \int_A \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \delta \overset{1}{p} dA .
\end{aligned} \tag{5.1d}$$

Die mit  $\delta(\cdot)$  gekennzeichneten Größen stellen Wichtungsfunktionen dar, die auf den Plattenrändern  $\Gamma_u$  bzw.  $\Gamma_p$  verschwinden. Sowohl die Freiwerte  $w, \psi_1, \psi_2$  und  $\overset{1}{p}$  als auch die Wichtungsfunktionen  $\delta w, \delta \psi_1, \delta \psi_2$  und  $\delta \overset{1}{p}$  werden mit identischen Ansatzfunktionen  $N_i$  für jeden Knoten  $i$  eines Elementes approximiert

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \psi_1 = \sum_{i=1}^n N_i \psi_{1i}, \quad \psi_2 = \sum_{i=1}^n N_i \psi_{2i}, \quad \overset{1}{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n N_i \overset{1}{p}_i \tag{5.2a}$$

$$\delta \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n N_i \delta w_i, \quad \delta \psi_1 = \sum_{i=1}^n N_i \delta \psi_{1i}, \quad \delta \psi_2 = \sum_{i=1}^n N_i \delta \psi_{2i}, \quad \delta \overset{1}{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n N_i \delta \overset{1}{p}_i, \tag{5.2b}$$

wobei  $n$  die Anzahl der Knoten eines Elementes angibt und  $i$  den betrachteten Knoten kennzeichnet. Die Gleichungen (5.1a)-(5.1d) können jetzt in Matrixschreibweise angegeben werden

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} & \mathbf{K}^{14} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} & \mathbf{K}^{24} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} & \mathbf{K}^{34} \\ \mathbf{K}^{41} & \mathbf{K}^{42} & \mathbf{K}^{43} & \mathbf{K}^{44} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \overset{1}{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^4 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Es entsteht ein frequenzabhängiges unsymmetrisches Matrixsystem. Die Einträge der Steifigkeitsmatrizen können mit Hilfe der Ausdrücke

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= Gh \int N_{i,1} N_{j,1} dA + Gh \int N_{i,2} N_{j,2} dA \\
K_{ij}^{12} &= Gh \int N_{i,1} N_{j,2} dA = K_{ij}^{21} \\
K_{ij}^{13} &= Gh \int N_{i,2} N_{j,2} dA = K_{ij}^{32} \\
K_{ij}^{14} &= h\beta \int N_i N_j dA = K_{ij}^{41} \\
K_{ij}^{22} &= Gh \int N_i N_j dA + \overset{3}{GH}(2+B) \int N_{i,1} N_{j,1} dA + \overset{3}{GH} \int N_{i,2} N_{j,2} dA \\
K_{ij}^{23} &= \overset{3}{GHB} \int N_{i,2} N_{j,1} dA + \overset{3}{GH} \int N_{i,1} N_{j,2} dA = K_{ij}^{32} \\
K_{ij}^{24} &= \overset{3}{H}\beta \int N_{i,1} N_{j,2} dA - \overset{3}{H}\alpha \int N_i N_{j,1} dA
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{33} &= Gh \int N_i N_j dA + G\overset{3}{H}(2+B) \int N_{i,2} N_{j,2} dA + G\overset{3}{H} \int N_{i,1} N_{j,1} dA \\
K_{ij}^{34} &= \overset{3}{H}\beta \int N_{i,2} N_j dA - \overset{3}{H}\alpha \int N_i N_{j,2} dA \\
K_{ij}^{42} &= \overset{3}{H}\alpha \int N_{i,1} N_j dA + \overset{3}{H}\beta \int N_i N_{j,1} dA \\
K_{ij}^{43} &= \overset{3}{H}\alpha \int N_{i,2} N_j dA + \overset{3}{H}\beta \int N_i N_{j,2} dA \\
K_{ij}^{44} &= \left(\overset{3}{H}\frac{\phi^2}{R} - hb\right) \int N_i N_j dA - \overset{3}{H}b \int N_{i,1} N_{j,1} dA - \overset{3}{H}b \int N_{i,2} N_{j,2} dA
\end{aligned}$$

berechnet werden. Die Einträge in den ersten drei Zeilen und Spalten gleichen der FEM für die elastische Platte. Für die poroelastische Platte kommt jeweils eine vierte Zeile und Spalte hinzu. Die dortigen Einträge sind zum Teil frequenzabhängig und bewirken, dass die Matrix nicht mehr symmetrisch ist. Die Einträge der Massenmatrix ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{11} &= hJ \int N_i N_j dA \\
M_{ij}^{22} &= \overset{3}{H}J \int N_i N_j dA = M_{ij}^{33}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Von der Form her, ist die Massenmatrix identisch mit der im elastischen Fall, allerdings lautet der Parameter  $J = \rho - \beta\rho_f$ , während in elastischen Fall  $J = \rho$  ist. Die frequenzabhängigen Einträge für den Porendruckfreiwert  $\overset{1}{p}$  wurden hier in die Steifigkeitsmatrix  $K$  eingetragen, da es sich bei ihnen nicht um Vielfache von  $\omega^2$  handelt.

Die Parameter  $i$  und  $j$  laufen jeweils über die Elementknoten. Die Einträge des Lastvektors lauten

$$\begin{aligned}
P_i^1 &= (\Sigma P_3 + h\overset{0}{F}_3) \int N_i dA \\
P_i^4 &= -\frac{\Delta P_Q}{i\omega} \int N_i dA,
\end{aligned}$$

wenn zur Beschreibung der Belastung die gleichen Formfunktionen wie für die Freiwerte benutzt werden.

### 5.1.2 Abbruch der Reihenentwicklung nach quadratischen Reihengliedern

Wird Reihenentwicklung nach quadratischen Gliedern abgebrochen muss zusätzlich noch der Freiwert  $w_d$  approximiert werden. Auch hier werden alle wirklichen und virtuellen Größen mit identischen Ansatzfunktionen  $N_i$  für jeden Knoten  $i$  eines Elementes approximiert

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \Psi_\alpha = \sum_{i=1}^n N_i \Psi_{\alpha i}, \quad \mathbf{p}^1 = \sum_{i=1}^n N_i p_i^1, \quad \mathbf{w}_d = \sum_{i=1}^n N_i w_{di} \quad (5.6a)$$

$$\delta \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n N_i \delta w_i, \quad \delta \Psi_\alpha = \sum_{i=1}^n N_i \delta \Psi_{\alpha i}, \quad \delta \mathbf{p}^1 = \sum_{i=1}^n N_i \delta p_i^1, \quad \delta \mathbf{w}_d = \sum_{i=1}^n N_i \delta w_{di}. \quad (5.6b)$$

Es entsteht wieder ein frequenzabhängiges unsymmetrisches Matrixsystem. Durch den hinzugekommenen Freiheitsgrad  $w_d$  haben die Elementmatrizen die Größe  $5 \times 5$  statt  $4 \times 4$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} & \mathbf{K}^{14} & \mathbf{K}^{15} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} & \mathbf{K}^{24} & \mathbf{K}^{25} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} & \mathbf{K}^{34} & \mathbf{K}^{35} \\ \mathbf{K}^{41} & \mathbf{K}^{42} & \mathbf{K}^{43} & \mathbf{K}^{44} & \mathbf{K}^{45} \\ \mathbf{K}^{51} & \mathbf{K}^{52} & \mathbf{K}^{53} & \mathbf{K}^{54} & \mathbf{K}^{55} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{11} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^{15} \\ 0 & \mathbf{M}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M}^{51} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^{55} \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{w}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^4 \\ \mathbf{P}^5 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Die neu hinzugekommenen Einträge in der Steifigkeitsmatrizen können mit Hilfe von

$$\begin{aligned} K_{ij}^{15} &= \overset{3}{G} \overset{H}{H} \int N_{i,1} N_{j,1} dA + G h \int N_{i,2} N_{j,2} dA = K_{ij}^{51} \\ K_{ij}^{25} &= \overset{3}{G} \overset{H}{H} \int N_{i,1} N_{j,2} dA + \overset{3}{H} \overset{2}{2} B \int N_i N_{j,1} dA = K_{ij}^{52} \\ K_{ij}^{35} &= \overset{3}{G} \overset{H}{H} \int N_{i,2} N_{j,2} dA + \overset{3}{H} \overset{2}{2} B \int N_i N_{j,2} dA = K_{ij}^{53} \\ K_{ij}^{45} &= \overset{3}{H} \overset{1}{N} \int N_i N_j dA \\ K_{ij}^{54} &= -\overset{3}{H} \overset{1}{N} \int N_i N_j dA \\ K_{ij}^{55} &= \overset{5}{G} \overset{H}{H} \int N_{i,1} N_{j,1} dA + \overset{5}{G} \overset{H}{H} \int N_{i,2} N_{j,2} dA + \overset{3}{G} \overset{H}{H} 4C \int N_i N_j dA \end{aligned}$$

berechnet werden und die neuen Einträge der Massenmatrizen mit

$$\begin{aligned} M_{ij}^{15} &= \overset{3}{H} \overset{J}{J} \int N_i N_j dA = M_{ij}^{51} \\ M_{ij}^{55} &= \overset{5}{H} \overset{J}{J} \int N_i N_j dA. \end{aligned}$$

Die Einträge des Lastvektors lauten

$$\begin{aligned} P_i^1 &= (\Sigma P_3 + \overset{0}{h} \overset{2}{F}_3 + \overset{3}{H} \overset{2}{F}_3) \int N_i dA \\ P_i^4 &= -\frac{\Delta P_Q}{i\omega} \int N_i dA \\ P_i^5 &= \left( \frac{h^2}{4} \Sigma P_3 + \overset{3}{H} \overset{0}{F}_3 + \overset{5}{H} \overset{2}{F}_3 \right) \int N_i dA. \end{aligned}$$

Auch hier werden zur Beschreibung der Belastung die gleichen Formfunktionen wie für die Freiwerte benutzt.

### 5.1.3 Abbruch der Reihenentwicklung nach kubischen Reihengliedern

Die Arbeitsgleichungen für die Platte dritter Ordnung bestehen aus 8 Gleichungen mit 8 Unbekannten. Auch hier werden alle wirklichen und virtuellen Größen mit identischen Ansatzfunktionen  $N_i$  für jeden Knoten  $i$  eines Elementes approximiert. Zu den Gleichungen (5.6) kommen noch die Approximationen für die  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  und  $\overset{3}{p}$  hinzu

$$\Psi_\alpha = \sum_{i=1}^n N_i \Psi_{\alpha i}, \quad \overset{3}{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n N_i \overset{3}{p}_i \quad (5.8a)$$

$$\delta \Psi_\alpha = \sum_{i=1}^n N_i \delta \Psi_{\alpha i}, \quad \delta \overset{3}{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n N_i \delta \overset{3}{p}_i. \quad (5.8b)$$

Es entsteht ein Matrixsystem der Form

$$\{\mathbf{K} + \omega^2 \mathbf{M}\} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.9)$$

mit unsymmetrischen Steifigkeits- und Massenmatrizen der Größe  $8 \times 8$ .

Die zur Steifigkeitsmatrix der Platte zweiter Ordnung hinzugekommenen Einträge lauten

$$\begin{aligned} K_{ij}^{16} &= 3GH \overset{3}{\int} N_i N_{j,1} dA = K_{ij}^{61} \\ K_{ij}^{17} &= 3GH \overset{3}{\int} N_i N_{j,2} dA = K_{ij}^{71} \\ K_{ij}^{18} &= 3H\beta \overset{3}{\int} N_i N_j dA = K_{ij}^{81} \\ K_{ij}^{26} &= 3GH \overset{3}{\int} N_i N_j dA + GH \overset{5}{(2+B)} \overset{5}{\int} N_{i,1} N_{j,1} dA + GH \overset{5}{\int} N_{i,2} N_{j,2} dA = K_{ij}^{62} \\ K_{ij}^{27} &= GH\beta \overset{5}{\int} N_{i,2} N_{j,1} dA + GH \overset{5}{\int} N_{i,1} N_{j,2} dA = K_{ij}^{72} \\ K_{ij}^{28} &= \overset{5}{H}\beta \overset{5}{\int} N_{i,1} N_j dA - \overset{5}{H}\alpha \overset{5}{\int} N_i N_{j,1} dA \\ K_{ij}^{36} &= GH\beta \overset{5}{\int} N_{i,1} N_{j,2} dA + GH \overset{5}{\int} N_{i,2} N_{j,1} dA = K_{ij}^{63} \\ K_{ij}^{37} &= 3GH \overset{3}{\int} N_i N_j dA + GH \overset{5}{(2+B)} \overset{5}{\int} N_{i,2} N_{j,2} dA + GH \overset{5}{\int} N_{i,1} N_{j,1} dA = K_{ij}^{73} \\ K_{ij}^{38} &= \overset{5}{H}\beta \overset{5}{\int} N_{i,2} N_j dA - \overset{5}{H}\alpha \overset{5}{\int} N_i N_{j,2} dA \\ K_{ij}^{46} &= \overset{5}{H}\beta \overset{5}{\int} N_i N_{j,1} dA + \overset{5}{H}\alpha \overset{5}{\int} N_{i,1} N_j dA \\ K_{ij}^{47} &= \overset{5}{H}\beta \overset{5}{\int} N_i N_{j,2} dA + \overset{5}{H}\alpha \overset{5}{\int} N_{i,2} N_j dA \end{aligned}$$





und die zur Massenmatrix der Platte zweiter Ordnung hinzugekommenen Einträge lauten

$$\begin{aligned} M_{ij}^{26} &= \overset{5}{HJ} \int N_i N_j dA = M_{ij}^{27} = M_{ij}^{62} = M_{ij}^{72} \\ M_{ij}^{36} &= \overset{5}{HJ} \int N_i N_j dA = M_{ij}^{37} = M_{ij}^{63} = M_{ij}^{73} \\ M_{ij}^{66} &= \overset{7}{HJ} \int N_i N_j dA = M_{ij}^{77}. \end{aligned}$$

Die Einträge des Lastvektors

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^4 \\ \mathbf{P}^5 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^8 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

lauten

$$\begin{aligned} P_i^1 &= (\Sigma P_3 + h \overset{0}{F}_3 + \overset{3}{H} \overset{2}{F}_3) \int N_i dA \\ P_i^4 &= -\frac{\Delta P_Q}{i\omega} \int N_i dA \\ P_i^5 &= \left( \frac{h^2}{4} \Sigma P_3 + \overset{3}{H} \overset{0}{F}_3 + \overset{5}{H} \overset{2}{F}_3 \right) \int N_i dA \\ P_i^8 &= -\frac{h^2}{4} \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \int N_i dA \end{aligned}$$

#### 5.1.4 Poroelastische Platte nach Kienzler

Behält man die in Kapitel 4.2.3 hergeleitete Formulierung bei und geht nicht zur üblichen FEM-Formulierung der Kirchhoffplatte mit der Durchbiegung  $w$  als einzigem elastischen Freiwert über, besteht das Variationsprinzip aus 8 Gleichungen mit 8 Unbekannten. Die Freiwerte und ihre Approximationen sind identisch mit (5.8).

Es entsteht ein Matrixsystem der Form

$$\{\mathbf{K} + \omega^2 \mathbf{M}\} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.12)$$

mit unsymmetrischen Steifigkeits- und Massenmatrizen der Größe  $8 \times 8$ . Die Steifigkeitsmatrix hat die Gestalt

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} & \mathbf{K}^{14} & \mathbf{K}^{15} & \mathbf{K}^{16} & \mathbf{K}^{17} & \mathbf{K}^{18} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} & \mathbf{K}^{24} & \mathbf{K}^{25} & \mathbf{K}^{26} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} & \mathbf{K}^{34} & \mathbf{K}^{35} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{37} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{41} & \mathbf{K}^{42} & \mathbf{K}^{43} & \mathbf{K}^{44} & \mathbf{K}^{45} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{48} \\ \mathbf{K}^{51} & \mathbf{K}^{52} & \mathbf{K}^{53} & \mathbf{K}^{54} & \mathbf{K}^{55} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{61} & \mathbf{K}^{62} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{71} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{73} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{81} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{84} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Sie hat bedeutend weniger Einträge als die Steifigkeitsmatrix der Platte mit kubischem Verschiebungsansatz.

Die Einträge der Steifigkeitsmatrix lauten

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11} &= Gh \int N_{i,1} N_{j,1} dA + Gh \int N_{i,2} N_{j,2} dA \\ K_{ij}^{12} &= Gh \int N_{i,1} N_j dA = K_{ij}^{21} \\ K_{ij}^{13} &= Gh \int N_{i,2} N_j dA = K_{ij}^{32} \\ K_{ij}^{14} &= h\beta \int N_i N_j dA = K_{ij}^{41} \\ K_{ij}^{15} &= \overset{3}{GH} \int N_{i,1} N_{j,1} dA + Gh \int N_{i,2} N_{j,2} dA = K_{ij}^{51} \\ K_{ij}^{16} &= 3\overset{3}{GH} \int N_i N_{j,1} dA = K_{ij}^{61} \\ K_{ij}^{17} &= 3\overset{3}{GH} \int N_i N_{j,2} dA = K_{ij}^{71} \\ K_{ij}^{18} &= 3\overset{3}{H}\beta \int N_i N_j dA = K_{ij}^{81} \\ K_{ij}^{22} &= Gh \int N_i N_j dA + \overset{3}{GH}(2+B) \int N_{i,1} N_{j,1} dA + \overset{3}{GH} \int N_{i,2} N_{j,2} dA \\ K_{ij}^{23} &= \overset{3}{GH}B \int N_{i,2} N_{j,1} dA + \overset{3}{GH} \int N_{i,1} N_{j,2} dA = K_{ij}^{32} \\ K_{ij}^{24} &= \overset{3}{H}\beta \int N_{i,1} N_j dA - \overset{3}{H}\alpha \int N_i N_{j,1} dA \\ K_{ij}^{25} &= \overset{3}{GH} \int N_{i,1} N_j dA + \overset{3}{H}2B \int N_i N_{j,1} dA = K_{ij}^{52} \\ K_{ij}^{26} &= 3\overset{3}{GH} \int N_i N_j dA = K_{ij}^{62} \\ K_{ij}^{33} &= Gh \int N_i N_j dA + \overset{3}{GH}(2+B) \int N_{i,2} N_{j,2} dA + \overset{3}{GH} \int N_{i,1} N_{j,1} dA \\ K_{ij}^{34} &= \overset{3}{H}\beta \int N_{i,2} N_j dA - \overset{3}{H}\alpha \int N_i N_{j,2} dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{35} &= GH \int N_{i,2} N_j dA + \overset{3}{H} 2B \int N_i N_{j,2} dA = K_{ij}^{53} \\
K_{ij}^{37} &= 3GH \int N_i N_j dA = K_{ij}^{73} \\
K_{ij}^{42} &= \overset{3}{H} \alpha \int N_{i,1} N_j dA + \overset{3}{H} \beta \int N_i N_{j,1} dA \\
K_{ij}^{43} &= \overset{3}{H} \alpha \int N_{i,2} N_j dA + \overset{3}{H} \beta \int N_i N_{j,2} dA \\
K_{ij}^{44} &= \left( \overset{3}{H} \frac{\Phi^2}{R} - hb \right) \int N_i N_j dA - \overset{3}{H} b \int N_{i,1} N_{j,1} dA - \overset{3}{H} b \int N_{i,2} N_{j,2} dA \\
K_{ij}^{45} &= \overset{3}{H} N \int N_i N_j dA \\
K_{ij}^{48} &= (-4\overset{3}{H} b) \int N_i N_j dA = K_{ij}^{84} \\
K_{ij}^{54} &= -\overset{3}{H} N \int N_i N_j dA \\
K_{ij}^{55} &= GH4C \int N_i N_j dA
\end{aligned}$$

Die Massenmatrix hat die Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{11} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M}^{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

und die zugehörigen Einträge lauten

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{11} &= hJ \int N_i N_j dA \\
M_{ij}^{22} &= \overset{3}{H} J \int N_i N_j dA = M_{ij}^{33}, & M_{ij}^{15} &= \overset{3}{H} J \int N_i N_j dA = M_{ij}^{51}.
\end{aligned}$$

Die Einträge des Lastvektors

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^4 \\ \mathbf{P}^5 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^8 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

lauten

$$\begin{aligned} P_i^1 &= (\Sigma P_3 - h F_3^0 - \overset{3}{H} \overset{2}{F}_3) \int N_i dA \\ P_i^4 &= -\frac{\Delta P_Q}{i\omega} \int N_i dA \\ P_i^5 &= \left(\frac{h^2}{4} \Sigma P_3 - \overset{3}{H} F_3^0\right) \int N_i dA \\ P_i^8 &= -\frac{h^2}{4} \frac{\Delta P_Q}{i\omega} \int N_i dA \end{aligned}$$

## 5.2 FE-Formulierung für die poroelastische Scheibe

Die Arbeitsgleichungen für die poroelastische Scheibe mit linearem Verschiebungsansatz wurde in Kapitel 4.2.1 hergeleitet. Wenn sowohl die Freiwerte  $u, v$ , und  $\overset{0}{p}$  als auch die Wichtungsfunktionen  $\delta u, \delta v$ , und  $\delta \overset{0}{p}$  analog zu (5.2) mit identischen Ansatzfunktionen  $N_i$  für jeden Knoten  $i$  eines Elementes approximiert werden, ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \overset{0}{\Psi}_3 \\ \overset{0}{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^4 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

das Gleichungssystem für die poroelastische Scheibe. Genau wie bei der Platte, verhindert der poroelastische Anteil eine Symmetrie der Steifigkeitsmatrix, in die die frequenzabhängigen poroelastischen Anteile eingetragen werden. Im Gegensatz zur klassischen elastischen Scheibentheorie existieren hier zusätzlich der Porendruckfreiheitsgrad  $\overset{0}{p}$  und ein zusätzlicher Freiheitsgrad  $\overset{0}{\Psi}_3$ .

Auch die Scheibenelemente müssen so ausgewählt werden, dass die in Kapitel 5.4 näher erläuterten Konvergenzkriterien erfüllt werden, was durch lineare Ansatzfunktionen gewährleistet wird. Die poroelastische Scheibe wird mit 4-Knoten-Elementen mit bilinearen Ansätzen approximiert.

## 5.3 Wahl der Elemente

Die Lösung einer mit Hilfe der FEM approximierten Problemstellung muss bei verfeinerter Diskretisierung gegen die exakte Lösung konvergieren. Deshalb werden an die Ansatzfunktionen bestimmte Forderungen, sogenannte Konvergenzkriterien gestellt [76]. Die Ansatzfunktion ist so zu wählen, dass

- bei einer Starrkörperverschiebung keine Verzerrungen der Elemente auftreten
- Verzerrungen mindestens konstant approximiert werden
- die Verzerrungen an den Zwischenflächen der Elemente endlich sind.

Das letzte Kriterium wird auch als Forderung nach konformen Ansätzen bezeichnet. Ansätze für Flächentragwerke müssen außerdem noch invariant gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems sein. Da in den Arbeitsgleichungen nur erste Ableitungen auftreten, werden die Konvergenzkriterien durch die Wahl bilinearer Ansätze für  $w$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $w_d$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\frac{1}{p}$  und  $\frac{3}{p}$  erfüllt.

Wie bei einer elastischen Platte müssen auch bei einer poroelastischen Platte Maßnahmen zur Verhinderung der Schubversteifung (shear-locking) getroffen werden. Unter shear-locking versteht man eine durch 'parasitäre' Schubspannungen verursachte reduzierte Konvergenzrate [11]. 'Parasitär' deshalb weil sie nicht zur Lösung beitragen. Die aus ihnen entstehende 'parasitäre' innere Energie verursacht eine zusätzliche Erhöhung der Steifigkeit, die nicht der Realität entspricht. Dadurch wird die Schubsteifigkeit im Verhältnis zur Biegesteifigkeit stark überbewertet. Die Berechnung der strukturellen Eigenschaften wird durch künstliche numerische Effekte sehr gestört. Zu Vermeidung dieses Problems gibt es verschiedene Strategien. Eine Möglichkeit ist die systematische Unterintegration der Schubanteile. Dadurch wird der Effekt des shear-lockings zwar verringert, es können dabei aber unzulässige Null-Energie-Eigenformen auftreten [41]. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung spezieller lockingfreier Elemente. In Frage kommen z.B. das MITC-Element von Bathe und Dvorkin [5] oder das DSG-Element (DSG=Discrete Shear Gap) von Bischoff [13]. Da in dieser Arbeit dem DSG-Element der Vorzug gegeben wird, wird es im folgenden Abschnitt näher erläutert und zwar am Beispiel der Timoshenko-Theorie .

### 5.3.1 Das DSG-Element

Betrachtet wird das in Bild 5.1 dargestellte Timoshenko-Balken-Element. Der erste Schritt bei der DSG-Methode besteht darin, die Deformation des Balkenelements nicht direkt über die Interpolation der Knotenwerte zu beschreiben, sondern zunächst Biege und Schubanteil zu entkoppeln [12]. Die Verformung des Balkens wird deshalb mit Hilfe der Durchbiegung  $w(x)$  und der Querschnittsverdrehung  $\psi(x)$  beschrieben. Die Differenz zwischen Durchbiegung und dem negativen Gradienten der Durchbiegung  $-w'(x)$  beschreibt die Schubverzerrung  $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = w'(x) + \psi(x). \quad (5.17)$$

Bei reiner Biegung muss die Schubverformung verschwinden

$$0 = w'(x) + \psi(x). \quad (5.18)$$

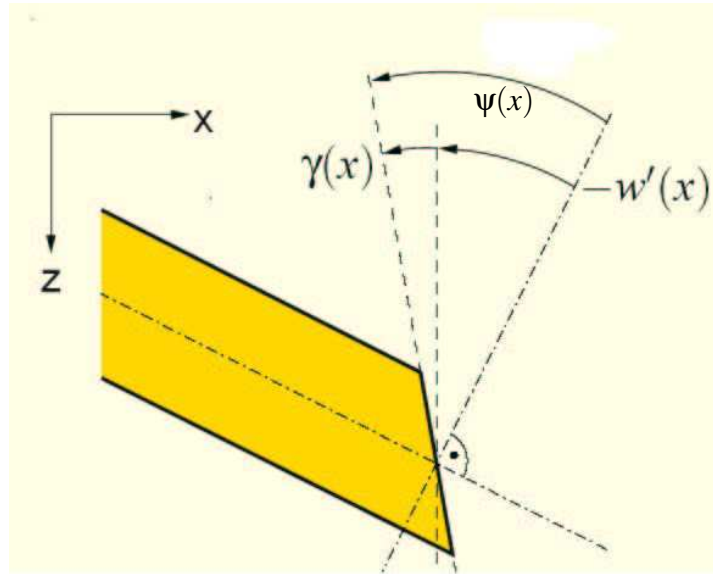


Abbildung 5.1: Timoshenko-Balken

Die Schubklaffung (shear gap)  $\Delta w_\gamma$ , also der Verformungsanteil, durch den sich die tatsächliche Verformung von der reinen Biegeverformung unterscheidet, kann durch folgende Gleichung ermittelt werden

$$\Delta w_\gamma(\hat{x}) = \int_{x_0}^{\hat{x}} \gamma dx = w|_{x_0}^{\hat{x}} + \int_{x_0}^{\hat{x}} \psi dx = \underbrace{w(\hat{x}) - w(x_0)}_{\Delta w} + \Delta w_b. \quad (5.19)$$

Dadurch wird die Änderung der Durchbiegung zwischen den Punkten  $x_0$  und  $\hat{x}$  beschrieben. Die Schubklaffung  $\Delta w_\gamma$ , ergibt sich aus der Änderung der gesamten Verschiebung  $\Delta w$  und der allein durch die Biegung verursachten Verschiebung, (siehe Abb.5.2). Die diskrete Schubklaffung (Discrete Shear Gap) an einem Knoten  $i$  erhält man durch Integration der diskretisierten Schubdehnungen

$$\Delta w_\gamma^i(\hat{x}_i) = w_h|_{x_1}^{x_i} + \int_{x_1}^{x_i} \psi_h dx = \int_{x_1}^{x_i} \gamma_h dx. \quad (5.20)$$

Für den Fall reiner Biegung, wäre die diskrete Schubklaffung gleich null.

Nach der Diskretisierung der Verschiebungen und Querschnittsverdrehungen, gilt (5.17) nicht mehr

$$\gamma(x) \neq w'(x) + \psi(x). \quad (5.21)$$

Am besten ist das bei der reinen Biegung zu erkennen. Da sowohl Durchbiegung als auch Querschnittsverdrehung durch ein und dieselbe Funktion approximiert werden, kann die Differenz zwischen der Ableitung der Durchbiegung und der Verdrehung nicht mehr null sein, da die Verdrehung nun eine Ordnung höher approximiert ist als die erste Ableitung der Durchbiegung

$$0 \neq w'(x) + \psi(x). \quad (5.22)$$

Bei den gängigen Verschiebungselementen wird die Bedingung (5.17) angewandt, obwohl sie nicht mehr gültig ist. Aufgrund der zu niedrigen Ansätze der Verschiebungen im Vergleich zu den Rotationen gilt

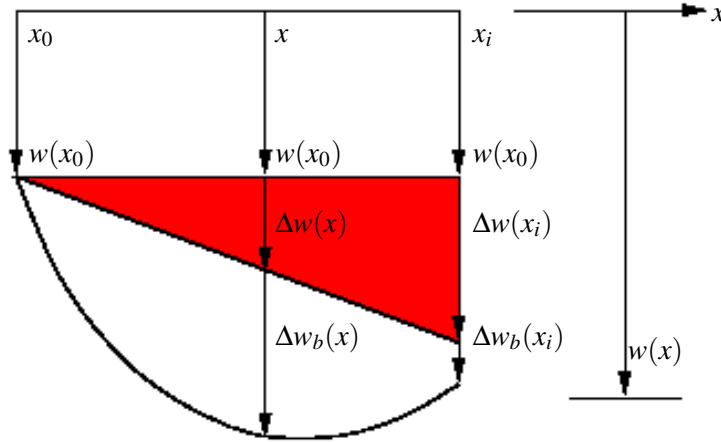


Abbildung 5.2: Shear gap

diese Bedingung für reine Verschiebungselemente nur noch an den Knotenpunkten, was in Abbildung 5.2 zu erkennen ist. Das Element hat dadurch eine künstlich erhöhte Steifigkeit. Die diskreten Schubklaffungen werden deshalb immer an den Knoten ausgerechnet und dann im Element interpoliert. Für den Fall der reinen Biegung wird damit der gesamte Schubverlauf Null. Bei allgemeinen Lastfällen sind die so berechneten Schubverzerrungen frei von parasitären Anteilen

Die getrennte Behandlung der Schubklaffungen führt auf folgende Diskretisierung der Freiwerte

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \gamma_{\mathbf{h}} = \sum_{i=1}^N \frac{dN^i}{dx} \Delta w_{\gamma}^i, \quad \Psi_{\alpha} = \sum_{i=1}^n N_i \Psi_{\alpha i}, \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n N_i p_i \quad (5.23)$$

$$\mathbf{w}_{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^n N_i w_{di}, \quad \gamma_{\mathbf{dh}} = \sum_{i=1}^N \frac{dN^i}{dx} \Delta w_{d\gamma}^i, \quad \Psi_{\alpha} = \sum_{i=1}^n N_i \Psi_{\alpha i}, \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n N_i p_i^3. \quad (5.24)$$

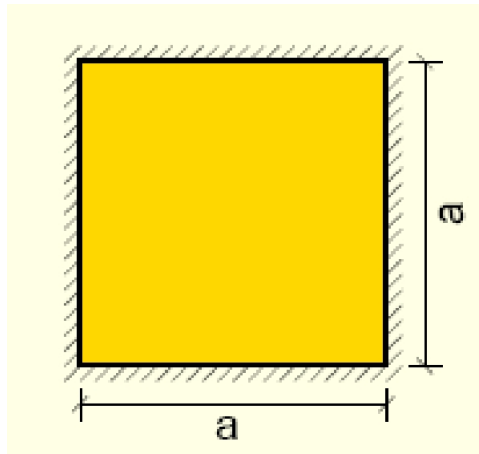
### 5.3.2 Überprüfung der Plattenelemente

Für elastische Platten kann die Auswahl der Elemente durch den Vergleich mit Referenzbeispielen verifiziert werden. Deshalb werden die Eigenfrequenzen für eine Testplatte mit den Ergebnissen anderer Methoden und Theorien verglichen. Als Testbeispiel dient die in Abbildung 5.3 dargestellte Platte mit den angegebenen Parametern. Die ersten vier Eigenfrequenzen dieser eingespannten Platte werden mit Hilfe der DSG4-Elementen mit bilinearen Ansatzfunktionen und 16\*16 Elementen bestimmt. Die Ergebnisse werden dann mit der FEM für die Mindlinplatte ohne Schubkorrektur, der FEM für die Kirchhoffplatte, der analytischen Lösung für die Kirchhoffplatte von Leissa [50], der Randelementmethode für die Mindlinplatte von Cheng [23] und den Berechnungen mit Hilfe der pb-2-Ritz-Methode von Liew [52] verglichen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.1 dargestellt, wobei die dimensionslosen Eigenfrequenzen mit Hilfe der Gleichung

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{B}} \quad (5.25)$$

mit  $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  berechnet werden.





$$E = 1,02 \text{ MN/m}^2$$

$$\nu = 0,34$$

$$\rho = 8350 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 0,2 \text{ m}$$

$$h = 0,01 \text{ m}$$

Abbildung 5.3: Eingespannte quadratische Platte

Methode	$\bar{\omega}^1$	$\bar{\omega}^2$	$\bar{\omega}^3$	$\bar{\omega}^4$
Leissa	35,990	73,410	108,270	131,640
Cheng	34,936	69,775	101,030	121,575
Liew	34,968	69,827	101,065	121,623
FEM(Mindlin)	40,467	81,775	115,421	146,054
FEM(Kirchhoff)	35,986	73,397	108,223	131,600
FEM(DSG4)	35,277	71,454	103,393	128,399

Tabelle 5.1: Dimensionslose Eigenfrequenzen einer eingespannten Platte

Die Eigenfrequenzen für die Mindlinplatte ohne Schubkorrektur liegen dabei deutlich höher als die anderen Ergebnisse. Mit Schubkorrektur befinden sie sich dagegen im selben Bereich wie die anderen Ergebnisse. Bei der Formulierung der Mindlinplattenelemente ist also die Verwendung einer Schubkorrektur angebracht. Da das Schubverhalten eines poroelastischen Materials dem eines elastischen Materials gleicht, kann diese Erkenntnis auf die poroelastische Platte übertragen werden.

## 5.4 Diskretisierung

Bei den untersuchten Problemstellungen variieren die Verformungen abhängig von der Frequenz. Deshalb müssen die Abmessungen der Finiten Elemente kompatibel mit der Wellenlänge der maximal zu betrachtenden Frequenz sein. Göransson [39] gibt als Faustregel den Wert von sechs bis zwölf Knoten pro Wellenlänge an je nach Art der Analyse und der geforderten Genauigkeit.

Die Wellenlänge  $\lambda$  kann mit Hilfe der Gleichung

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c \cdot 2 \cdot \pi}{\omega} \quad (5.26)$$

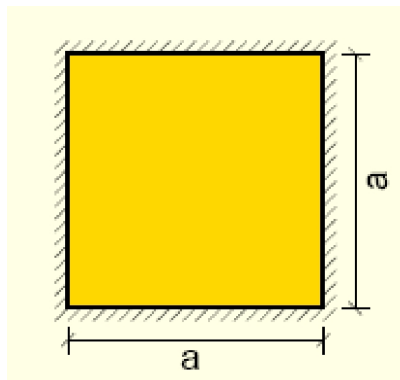
berechnet werden, wobei  $c$  für die Wellengeschwindigkeit steht und  $f$  für die Frequenz.

## 6 Beispiele

In diesem Kapitel soll mit einigen einfachen Beispielen die vorgestellte Theorie im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit getestet werden.

### 6.1 Belastete poroelastische Felsplatte

Als erstes Testbeispiel wird die in Abbildung 6.1 dargestellte fest eingespannte Platte aus Berea-Sandstein gewählt. Fest eingespannt bedeutet hier, dass die Freiwerte sowohl für den Porendruck als auch für die Verschiebungen und Verdrehungen an den Rändern zu null gesetzt werden. In Tabelle 6.1 sind die Materialdaten für den Fels sowohl mit Wasser gefüllten Poren als auch mit Luftporen dargestellt.



Flächenlast 100 N  
 256 lineare Elemente  
 $h = 0.01$  m  
 $a = 0.2$  m

Abbildung 6.1: Fest eingespannte Platte

	$K \left[ \frac{N}{m^2} \right]$	$G \left[ \frac{N}{m^2} \right]$	$\rho \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$\phi$	$R \left[ \frac{N}{m^2} \right]$	$\rho_f \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$\alpha$	$\kappa \left[ \frac{m^4}{Ns} \right]$
Fels mit $H_2O$	$8 \cdot 10^9$	$6 \cdot 10^9$	2458	0.19	$4.7 \cdot 10^8$	1000	0.778	$1.9 \cdot 10^{-10}$
Fels mit Luft	$8 \cdot 10^9$	$6 \cdot 10^9$	2268	0.19	$1.9 \cdot 10^4$	1.3	0.778	$1.9 \cdot 10^{-10}$

Tabelle 6.1: Materialdaten Berea-Sandstein

Als erstes werden Rechnungen für die unterschiedlichen Herleitungen (linear Verschiebungsansatz, quadratischer Verschiebungsansatz, kubischer Verschiebungsansatz, Ansatz von Kienzler) miteinander verglichen. Dafür wird die Durchbiegung  $w$  am Plattenmittelpunkt  $P$  abhängig von der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  in Diagramm 6.2 dargestellt.

Dabei ist erkennbar, dass für niedrige Frequenzen die Ergebnisse trotz verschiedener Ansätze ähnlich sind. Bei höheren Frequenzen ist eine unterschiedliche Lage der Eigenfrequenzen erkennbar. Der Grad des Ansatzes beeinflusst nur die Lage der Eigenfrequenzen. Das Niveau der Durchbiegung bleibt im übrigen Bereich unverändert.

Bei der Betrachtung der Eigenfrequenzen fällt auf, dass die Werte für den Ansatz von Kienzler genau zwischen dem linearen und dem kubischen Ansatz liegen. Die Platte mit kubischem Verschiebungsansatz hat die niedrigsten Eigenfrequenzen die Platte mit linearem Verschiebungsansatz die höchsten. Das entspricht auch genau den Untersuchungen zu unterschiedlichen elastischen Plattenelementen, bei denen die Werte der Kirchhofftheorie auch höher waren als die mit einem DSG4-Element ermittelten Werte.

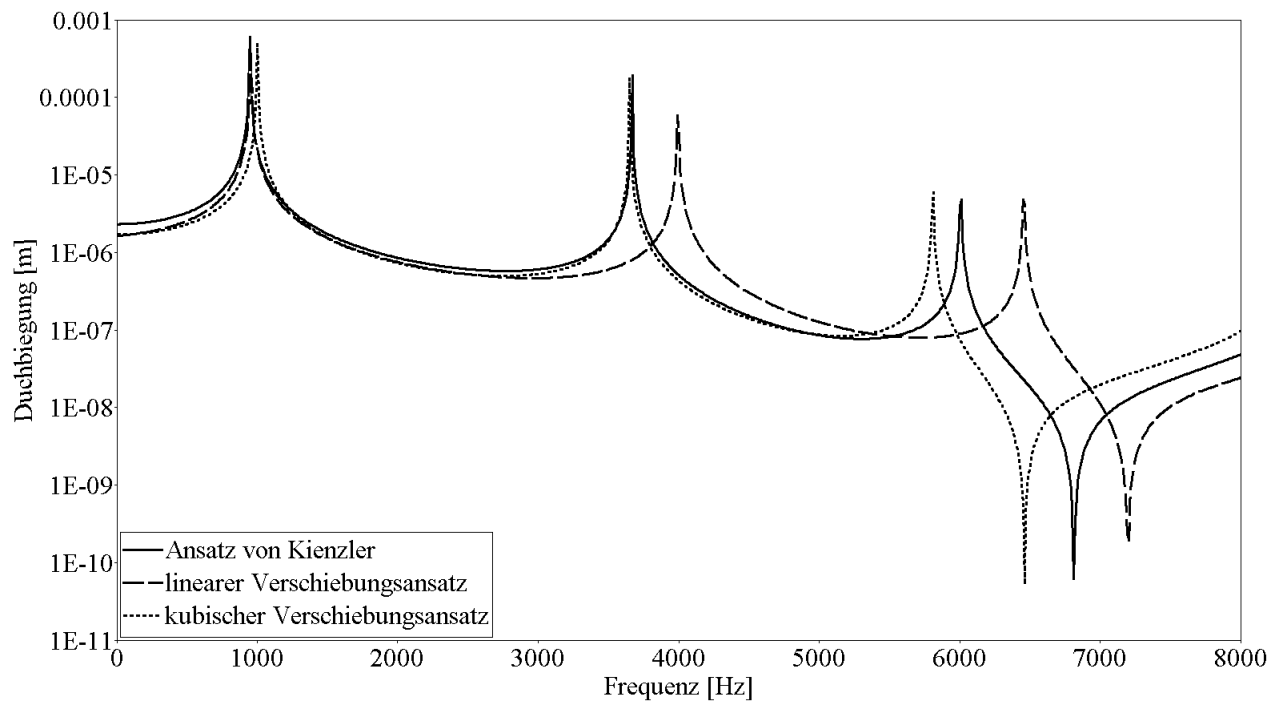


Abbildung 6.2: Vergleich unterschiedlicher Herleitungen: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt

In Abbildung 6.3 sind die frequenzabhängigen Durchbiegungen für eine gesättigte ('drained') und eine ungesättigte ('undrained') Felsplatte dargestellt. In beiden Fällen handelt es sich um elastische Näherungen der porelastischen Theorie. Die 'undrained' Platte stellt die elastische Näherung für eine porelastische Platte dar, deren Flussrandbedingung gleich Null ist, d.h. an den Rändern der Platte kann kein Porenfluid eindringen oder entweichen [29]. Die 'drained' Platte stellt die Näherung für eine porelastische Platte dar, deren Randbedingung für den Porendruck, auf einen bestimmten Wert  $p = p_0$  festgelegt ist.

Bei der 'drained' Platte werden die Materialparameter  $K$  und  $\nu$  der entsprechenden porelastischen Platte übernommen. Bei der 'undrained' Platte nimmt der Kompressionsmodul  $K$  den Wert von  $K_u = 1,3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$  an und die Querkontraktionszahl  $\nu$  erhält den Wert von  $\nu_u = 0,33$ . Die Dichte ist in beiden Fällen mit der Dichte der porelastischen Platte identisch. Die 'drained' Platte weist die niedrigsten Eigenfrequenzen auf, die 'undrained' die höchsten, was den bisherigen Erkenntnissen über porelastische Materialien [29] entspricht.

Die Eigenfrequenzen der porelastischen Platte liegen genau zwischen diesen beiden Extremfällen.

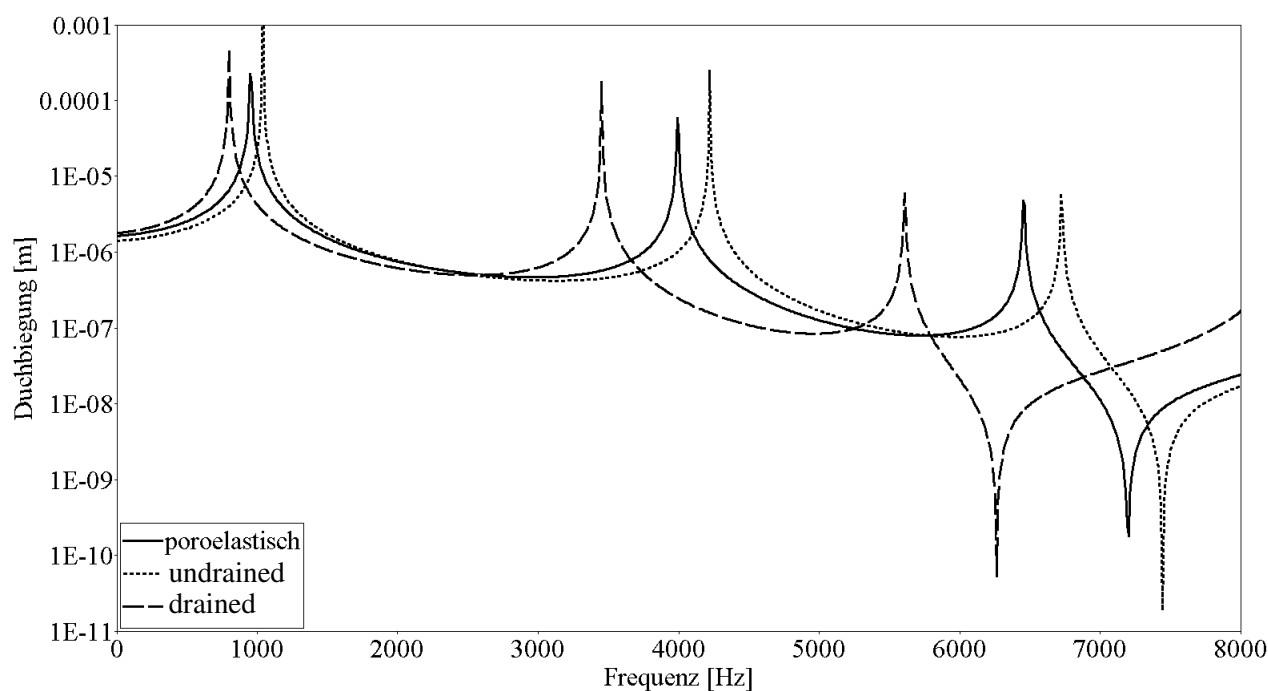


Abbildung 6.3: Vergleich der Platten im 'drained', 'undrained' und normalen Zustand: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt

In Beispiel 6.4 wird die Porosität für die Felsplatte variiert. Mit zunehmender Porosität  $\phi$  nehmen auch die Eigenfrequenzen zu, wobei die Auswirkung auf die zweite Eigenfrequenz größer ist als auf die erste. Dieser Effekt kommt zustande, weil die Frequenz proportional zur Wurzel aus dem Quotienten von Steifigkeit und Masse ist und durch eine erhöhte Porosität sich die Masse stärker als die Steifigkeit verringert [70].

In Beispiel 6.5 werden die Durchbiegungen  $w$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  für unterschiedliche Permeabilitäten  $\kappa$  verglichen. Dabei verursacht eine größere Permeabilität eine Erhöhung der Eigenfre-

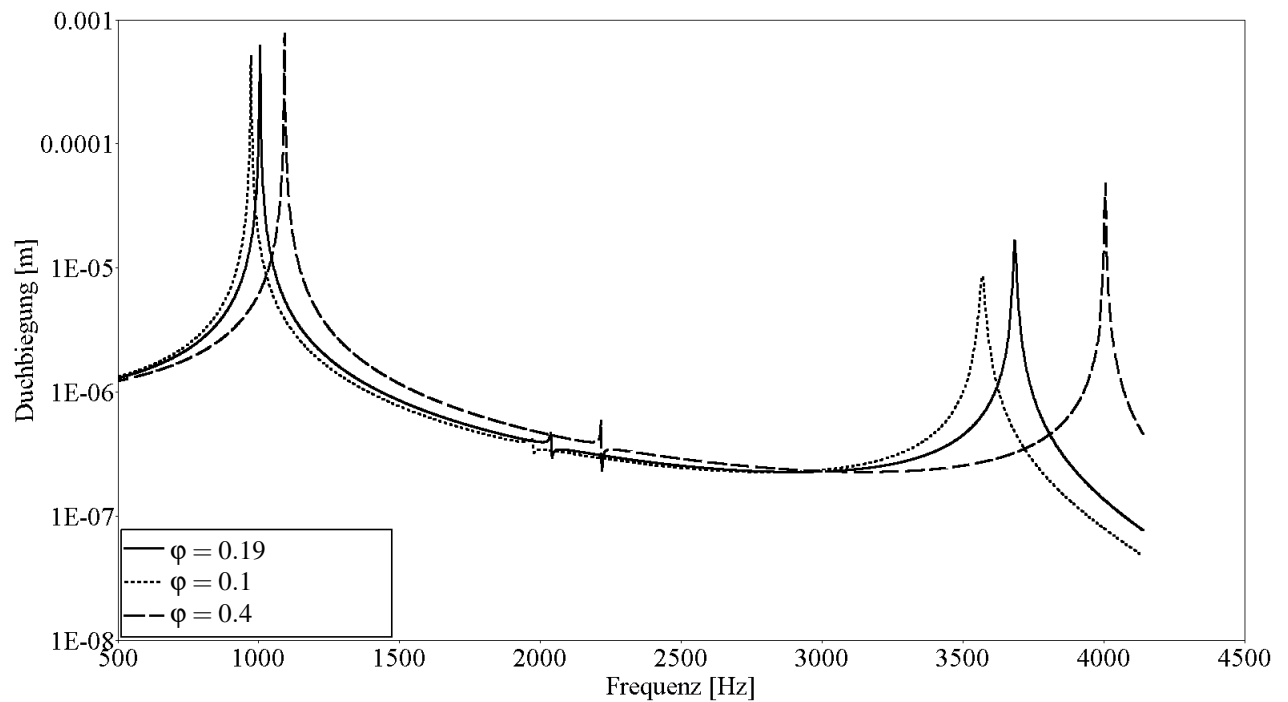


Abbildung 6.4: Vergleich unterschiedlicher Porositäten: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt

quenz. Weiterhin wird der Wert der Durchbiegung für eine kleinere Permeabilität stärker gedämpft, da die Permeabilität umgekehrt proportional zur Viskosität des Porenfluids ist und mit ansteigender Viskosität die Dämpfung in einem Fluid größer wird. Auch der Einfluss der Permeabilität ist bei der zweiten Eigenfrequenz größer als bei der ersten.

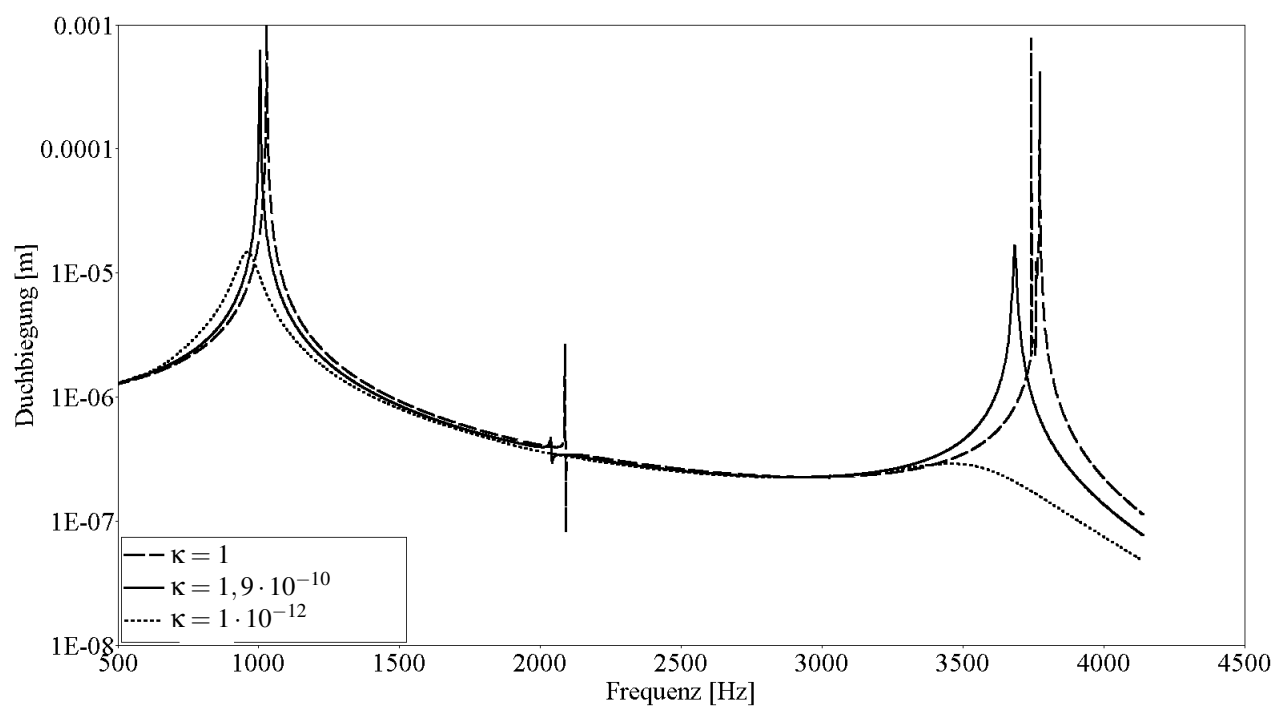


Abbildung 6.5: Vergleich unterschiedlicher Permeabilitäten: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt

Abbildung 6.6 zeigt die frequenzabhängige Durchbiegung für die Felsplatte einmal mit luftgefüllten Poren und einmal mit wassergefüllten Poren. Auch hier kommt es zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen. Außerdem werden die Eigenfrequenzen beim mit Wasser gefüllten Fels stärker gedämpft.

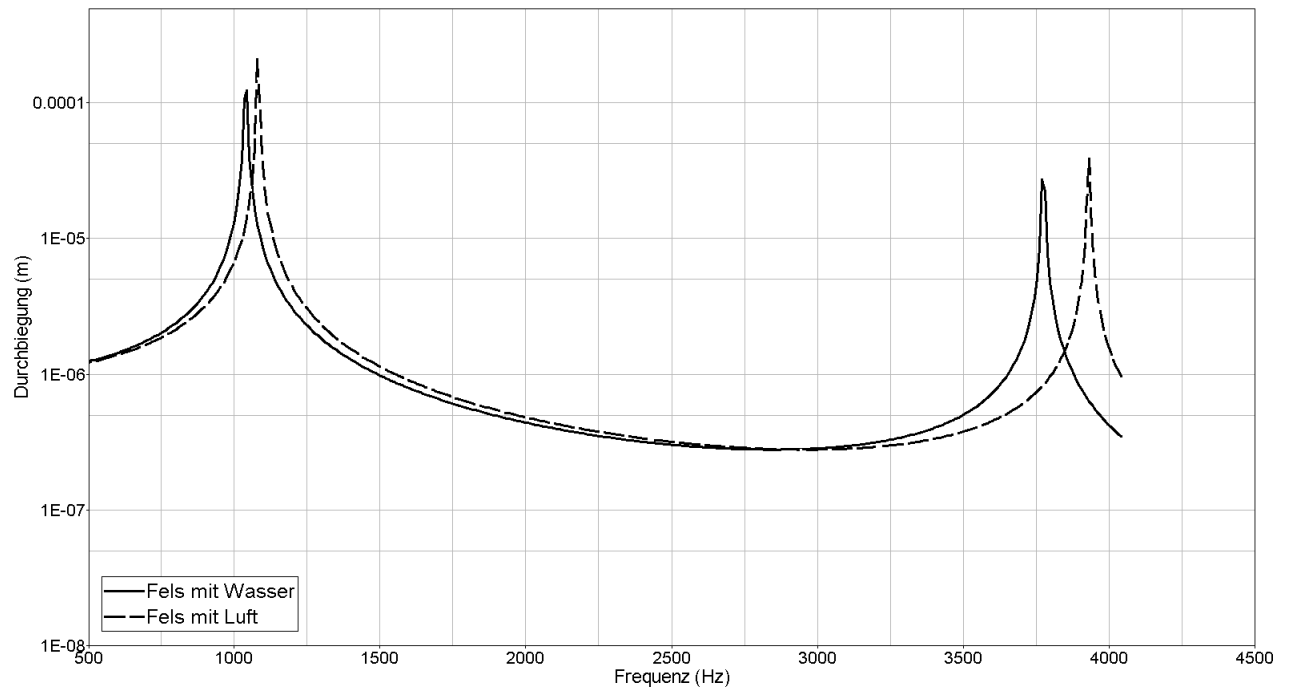
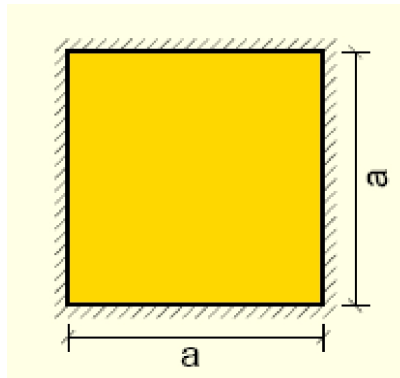


Abbildung 6.6: Vergleich der poroelastischen Platte mit luft- und wassergefüllten Poren: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt

## 6.2 Belastete poroelastische Schaumplatte

Da eine Felsplatte normalerweise nicht zur Schalldämmung benutzt wird, werden die weiteren Untersuchungen an Schäumen durchgeführt. In der Realität werden diese Schäume in Paneelen, d.h. in Verbindung mit einer elastischen Platte verwendet. Hier werden allerdings die Schäume einzeln untersucht. Die Geometrie der Platte entspricht der untersuchten Felsplatte, allerdings wird ein feineres Netz gewählt und die Belastung beträgt nur  $0,1N$  (siehe Abbildung 6.7)



Flächenlast  $0,1N$   
 1600 lineare Elemente  
 $h = 0.01\text{ m}$   
 $a = 0.2\text{ m}$

Abbildung 6.7: Fest eingespannte Platte aus Schaum

	$E \left[ \frac{N}{m^2} \right]$	$\nu$	$\rho \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$\phi$	$\alpha_\infty$	$\rho_f \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$\sigma_w \left[ \frac{Ns}{m^4} \right]$	$\Lambda \left[ \mu m \right]$
Schaum 485	$2,9 \cdot 10^5 + i1,2 \cdot 10^5$	$0,207 - i \cdot 0,003$	98	0,95	1,2	1,3	30500	50
Schaum 484	$7,2 \cdot 10^4 + i1,1 \cdot 10^4$	$0,189 - i \cdot 0,015$	71	0,95	1,34	1,3	27600	50
Schaum 456	$2,4 \cdot 10^5 + i4,8 \cdot 10^4$	0,2	84	0,95	1,35	1,3	34400	40

Tabelle 6.2: Materialdaten verschiedener Schäume

Die Materialdaten der Schäume wurden an der KU Leuven gemessen [66]. Die Elastizitätsmodule und die Querkontraktionszahlen haben jeweils einen komplexen Anteil, d.h. das Skelett ist viskoelastisch modelliert.

In den Abbildung 6.8-6.10 ist die Durchbiegung  $w$  am Plattenmittelpunkt  $P$  abhängig von der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  dargestellt. Da es sich bei Schäumen um sehr nachgiebige Materialien handelt, kommt es zu sehr großen Auslenkungen und es sind sehr viele Eigenfrequenzen vorhanden.

Dabei ist erkennbar, dass der Schaum 484 bedeutend weicher ist als die anderen beiden. Es wurde ein Frequenzbereich von  $1 - 1500\text{ Hz}$  untersucht. Die Regel für die Diskretisierung mit mindestens 6 Knoten pro Wellenlänge wird bis zur höchsten untersuchten Frequenz eingehalten. Um der Übersichtlichkeit zu erhalten, wurde der Frequenzbereich in 3 Teilbereiche unterteilt.



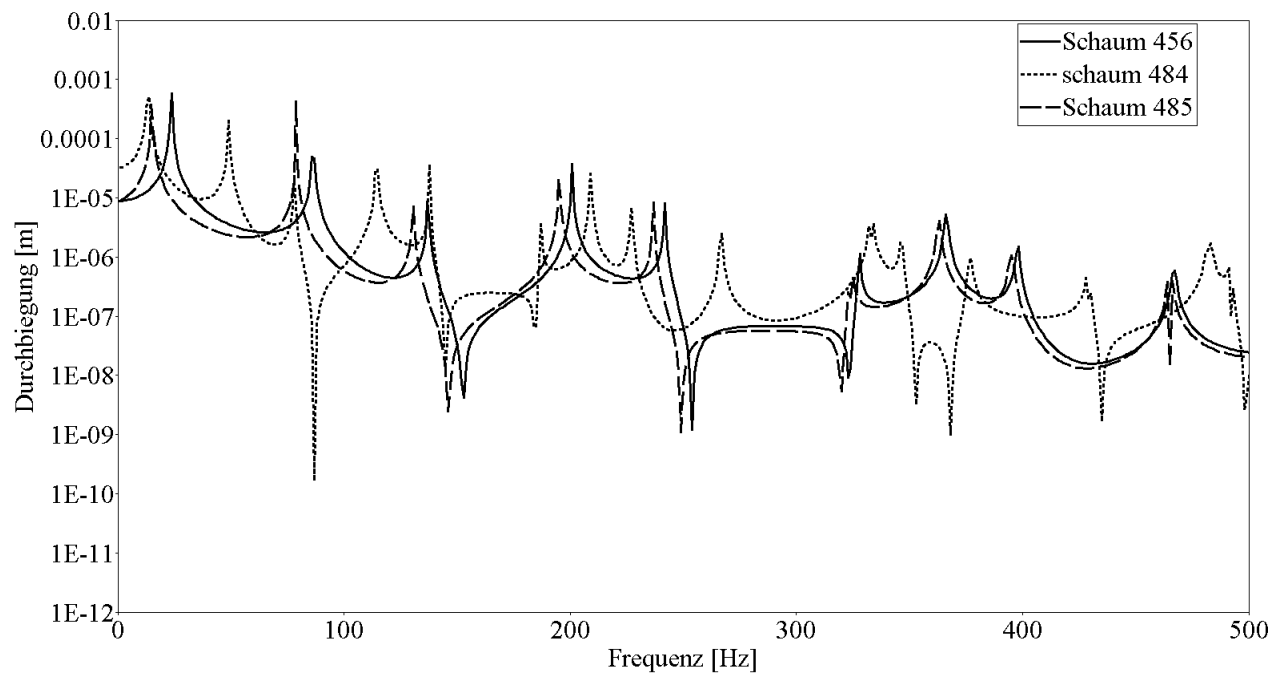


Abbildung 6.8: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 485: Frequenz 0-500Hz

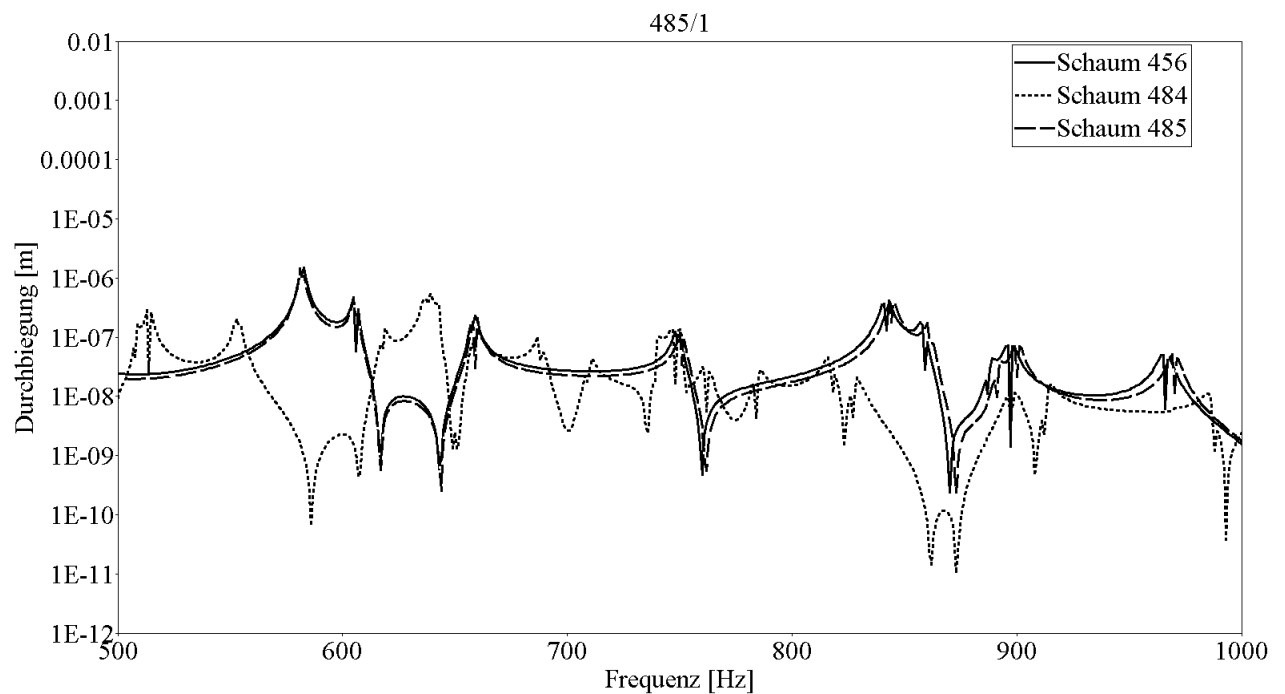


Abbildung 6.9: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 485: Frequenz 500-1000Hz

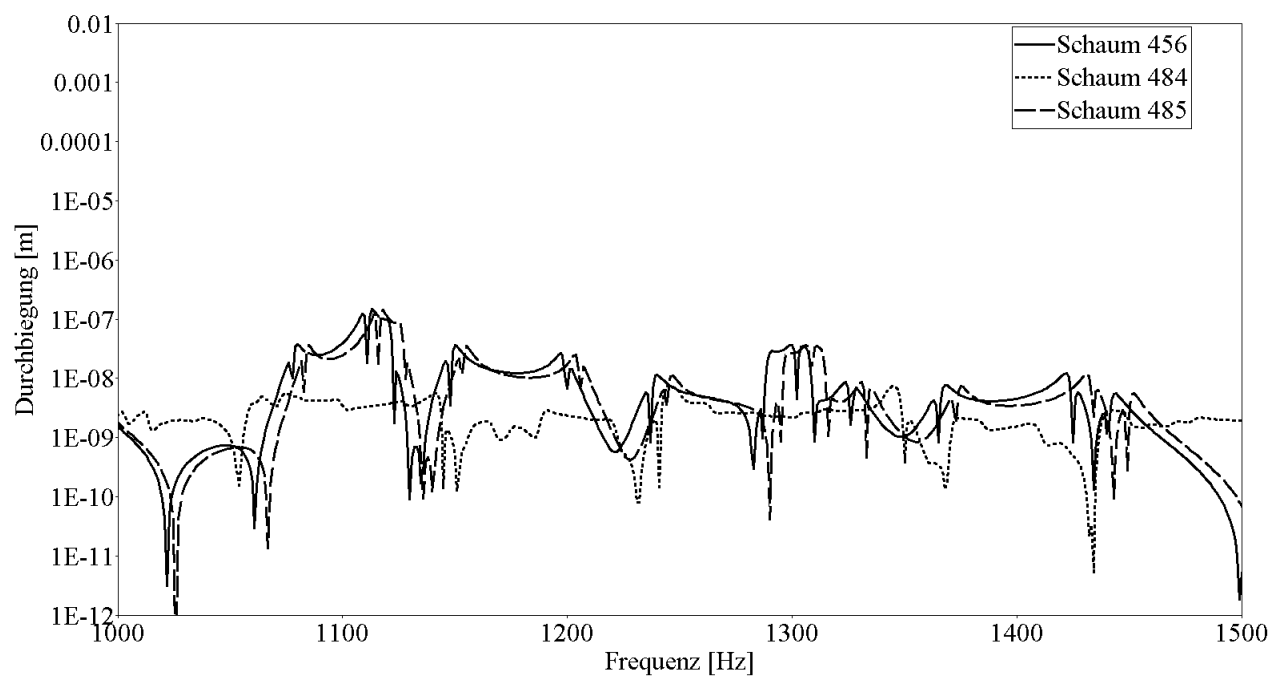


Abbildung 6.10: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 485: Frequenz 1000-1500Hz

In Abbildung 6.11 sind die unterschiedlichen Herleitungen für einen Schaum analog zu Beispiel 6.2 dargestellt. Es wurde ein relativ niedriger Frequenzbereich von 0 – 200 Hz gewählt. Auch hier ist die Lage der ersten Eigenfrequenz für die unterschiedlichen Herleitungsformen nahezu identisch. Bei höheren Eigenfrequenzen liegen die Werte für den Ansatz von Kienzler wie schon bei der Felsplatte zwischen dem linearen und dem kubischen Ansatz. Die Platte mit kubischem Verschiebungsansatz hat die niedrigsten Eigenwerte, die Platte mit linearem Verschiebungsansatz die höchsten.

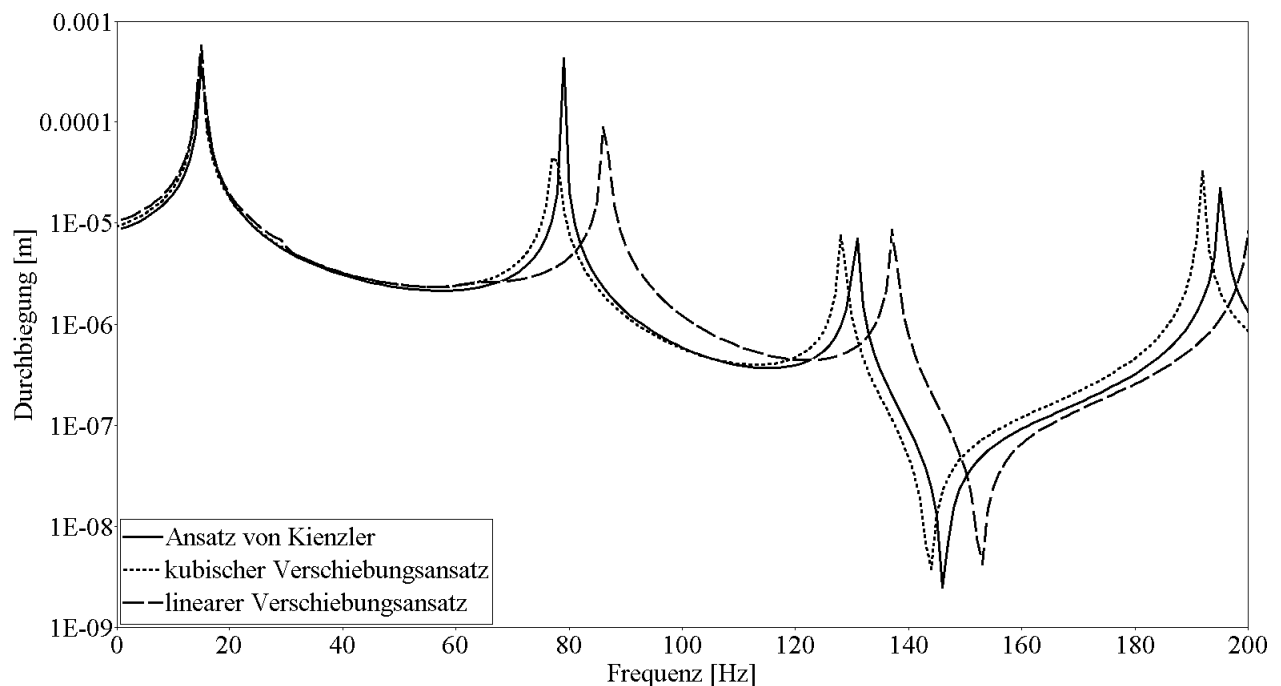


Abbildung 6.11: Vergleich unterschiedlicher Herleitungen für Schaum 456: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt

Das Verhalten der Schäume wurde mit dem Verhalten eines elastischen Materials mit identischem Elastizitätsmodul, identischer Querkontraktionszahl und identischer Dichte verglichen. Dabei wurde die Durchbiegung des Plattenmittelpunktes abhängig von der Frequenz untersucht.

In den Abbildung 6.12-6.14 sind die Ergebnisse für den Schaum 456 dargestellt. Bei niedrigen Frequenzen sind die Ergebnisse für das elastische Material mit denen für den poroelastischen Schaum nahezu identisch. Je höher die Frequenzen sind, desto stärker werden Resonanzfrequenzen beim poroelastischen Material gedämpft, was durch das Zusammenspiel der poroelastischen Materialparameter verursacht wird. Hierbei ist besonders der Effekt der Permeabilität  $\kappa$  zu beachten, deren Imaginärteil mit zunehmender Frequenz ansteigt (siehe Abbildung 2.2, 2.3). Der Fluss des Porenfluids ist geprägt durch die Viskosität und die Trägheit des Fluids. Im niederfrequenten Bereich dominiert die Viskosität, im höherfrequenten Bereich die Trägheit. Im niederfrequenten Bereich dominiert also der Realteil der Permeabilität das Ergebnis. Im hochfrequenten Bereich wird das Ergebnis vom Imaginärteil der Permeabilität dominiert [56]. Die Antiresonanzfrequenzen sind bei beiden Materialien identisch.

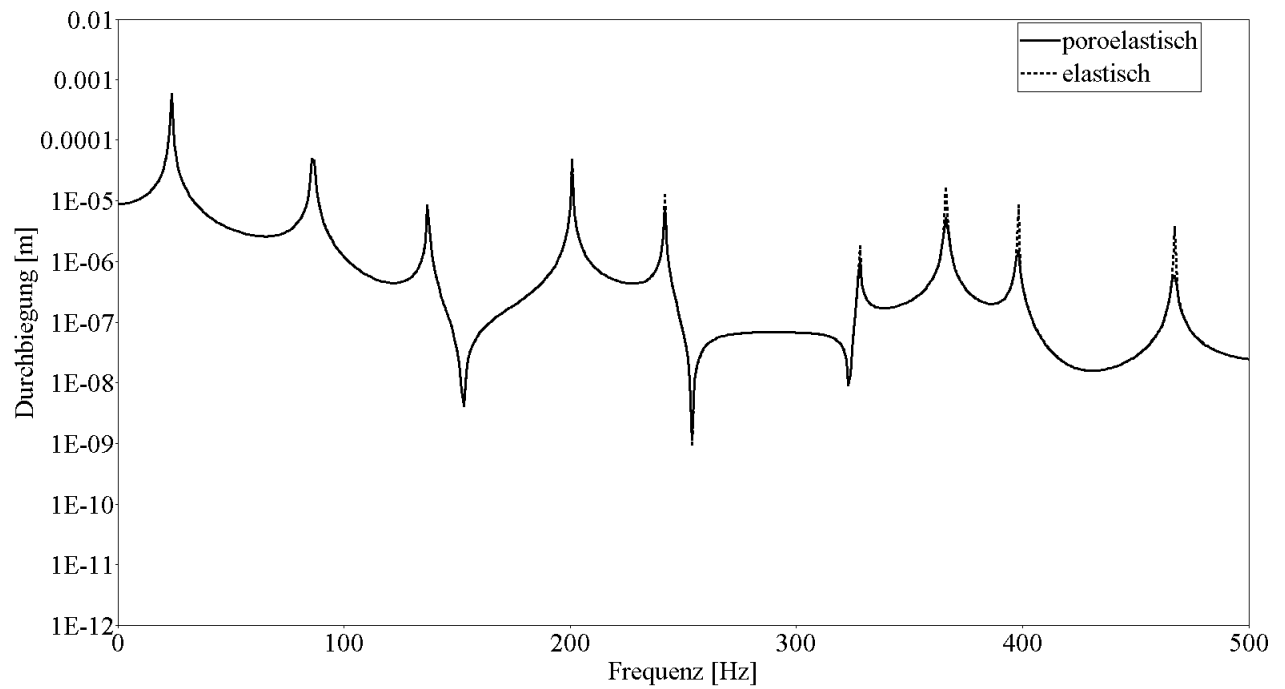


Abbildung 6.12: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 456: Frequenz 0-500Hz

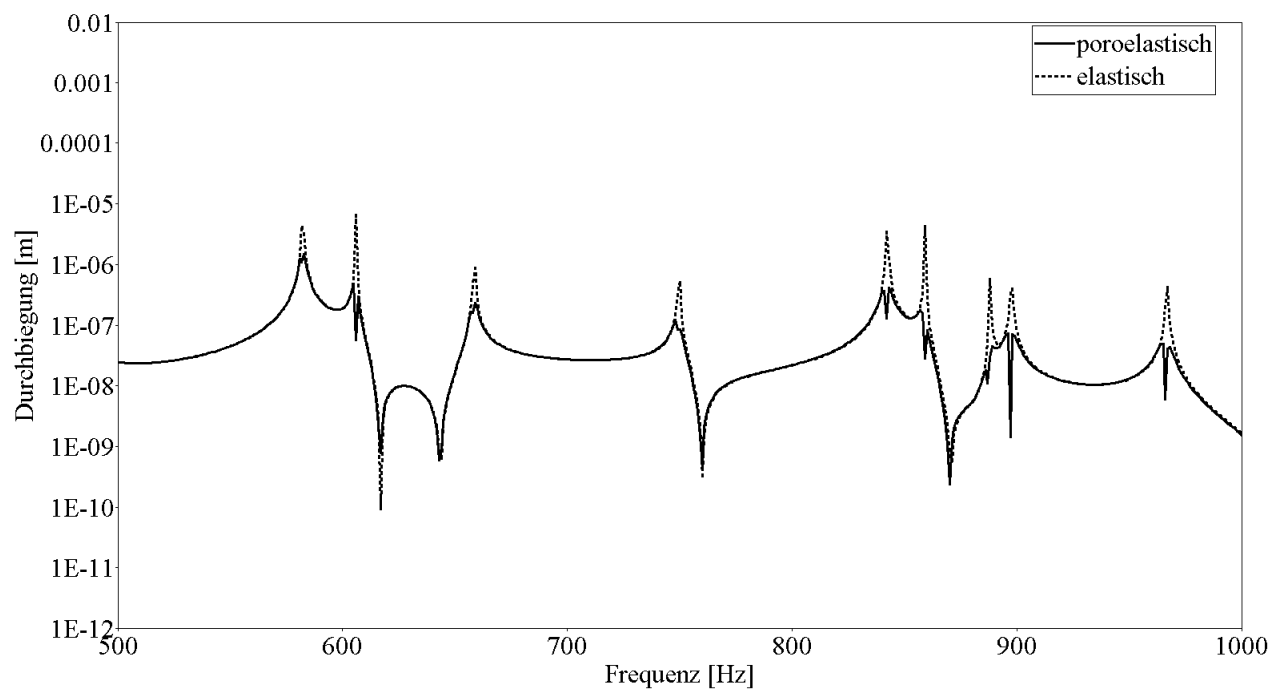


Abbildung 6.13: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 456: Frequenz 500-1000Hz

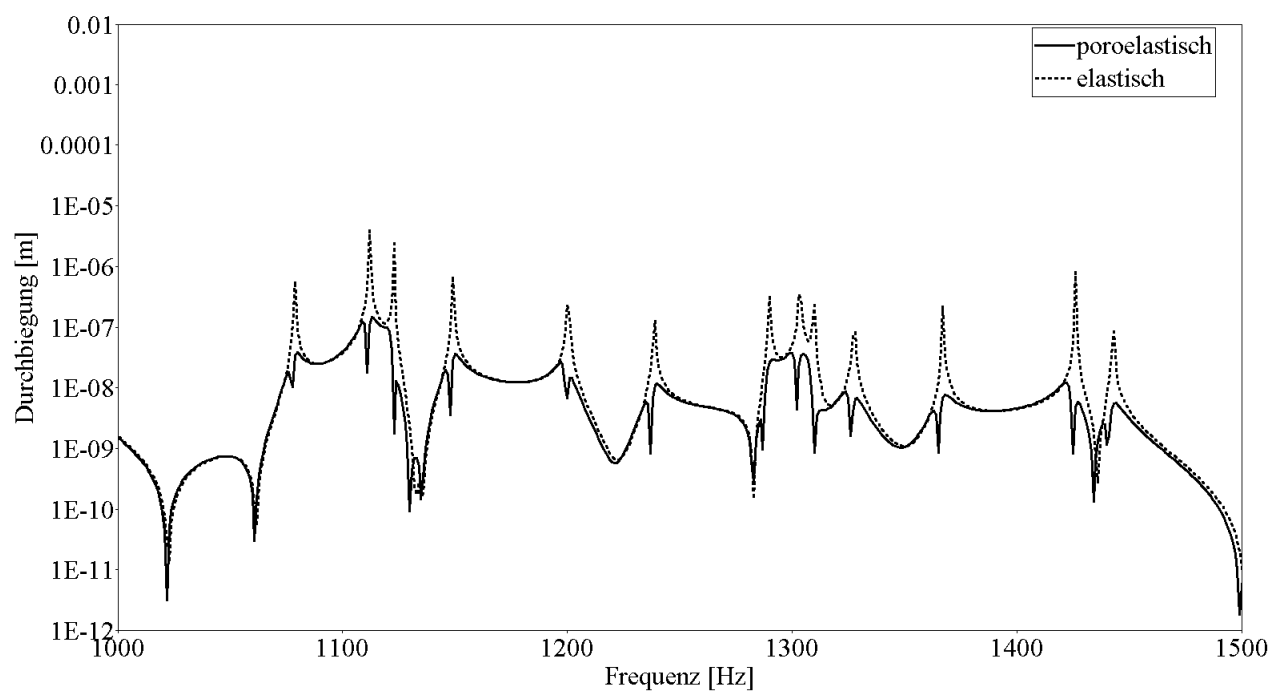


Abbildung 6.14: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 456: Frequenz 1000-1500Hz

In den Abbildungen 6.15-6.17 sind die Ergebnisse für den Schaum 484 dargestellt. Dieser Schaum ist bedeutend weicher. Die Dämpfung beginnt schon bei niedrigeren Frequenzen.

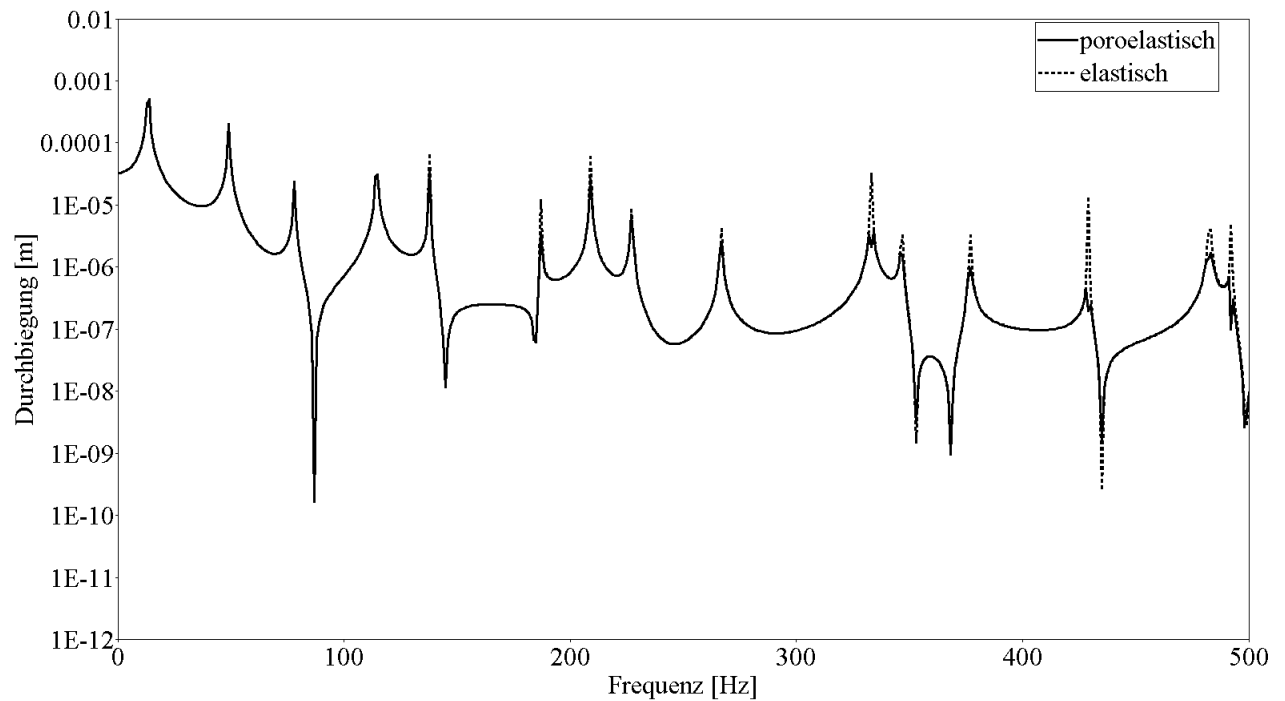


Abbildung 6.15: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 484 Frequenz 0-500Hz

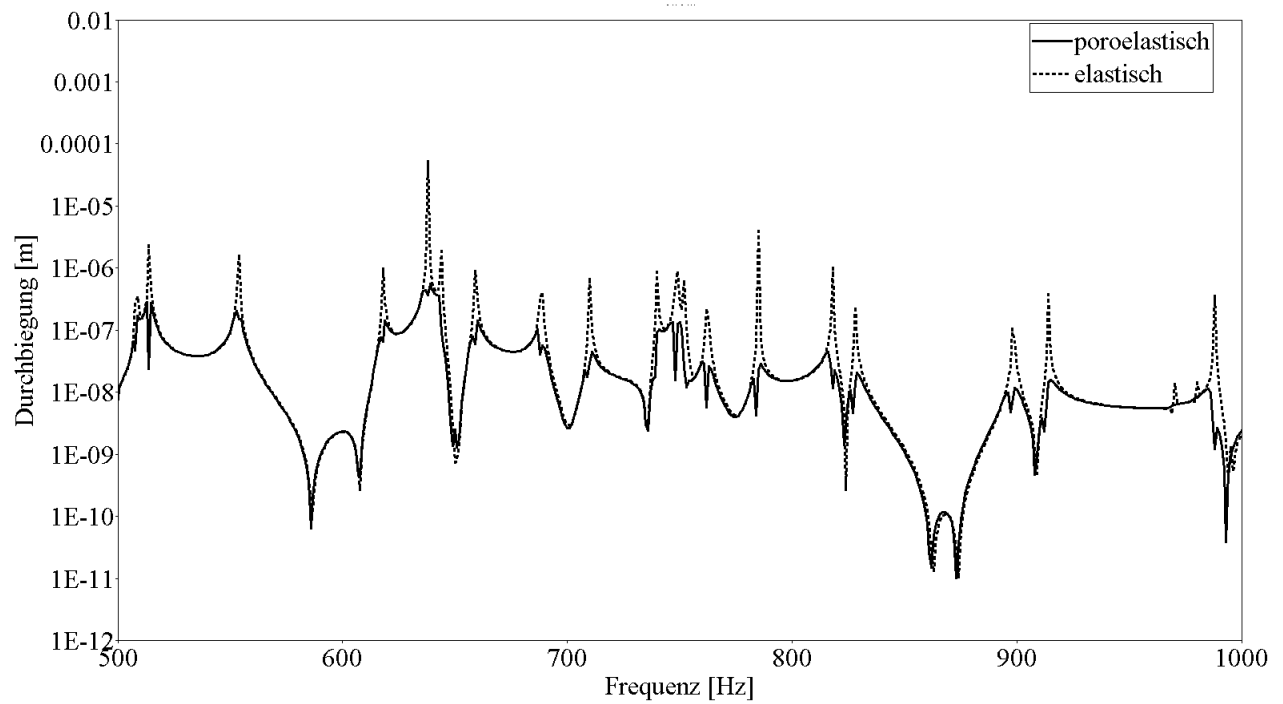


Abbildung 6.16: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 484: Frequenz 500-1000Hz

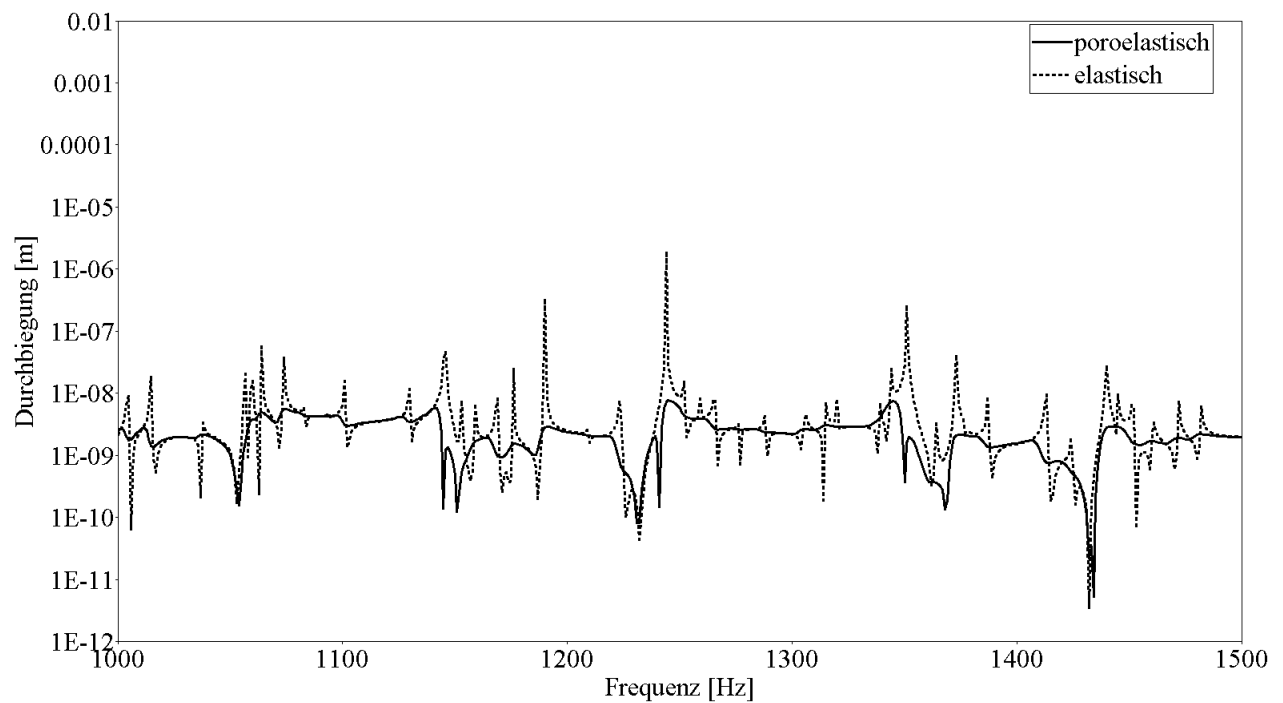


Abbildung 6.17: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 484: Frequenz 1000-1500Hz

Der Schaum 485, dessen Verhalten in den Abbildungen 6.18-6.20 dargestellt ist, zeigt ein ähnliches Verhalten wie Schaum 456, was auch in den Abbildungen 6.8-6.10 erkennbar ist.

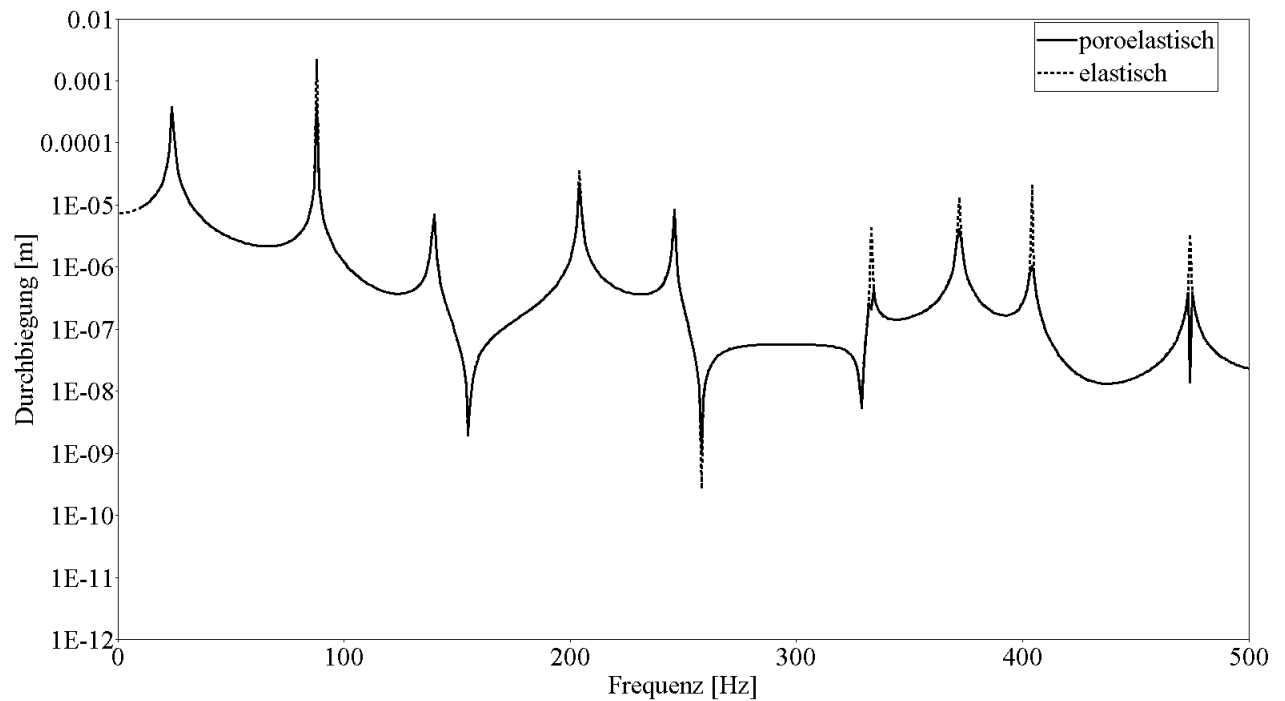


Abbildung 6.18: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 485: Frequenz 0-500Hz



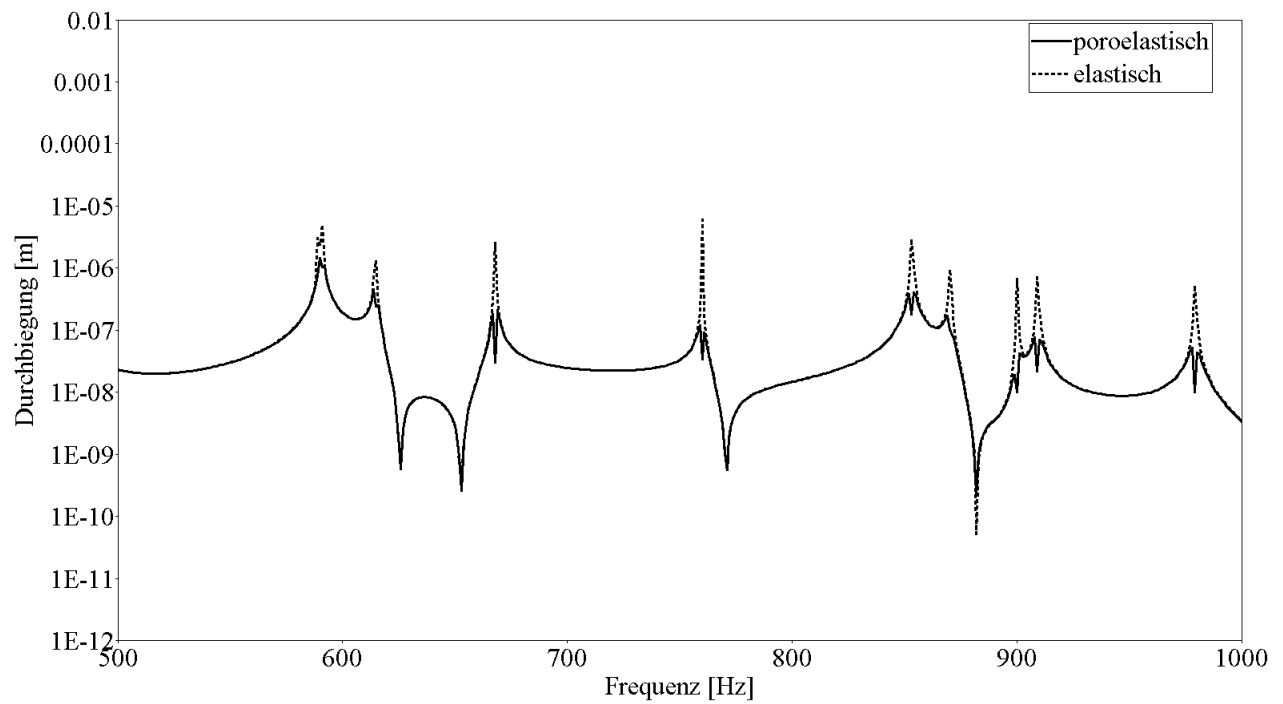


Abbildung 6.19: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 485: Frequenz 500-1000Hz

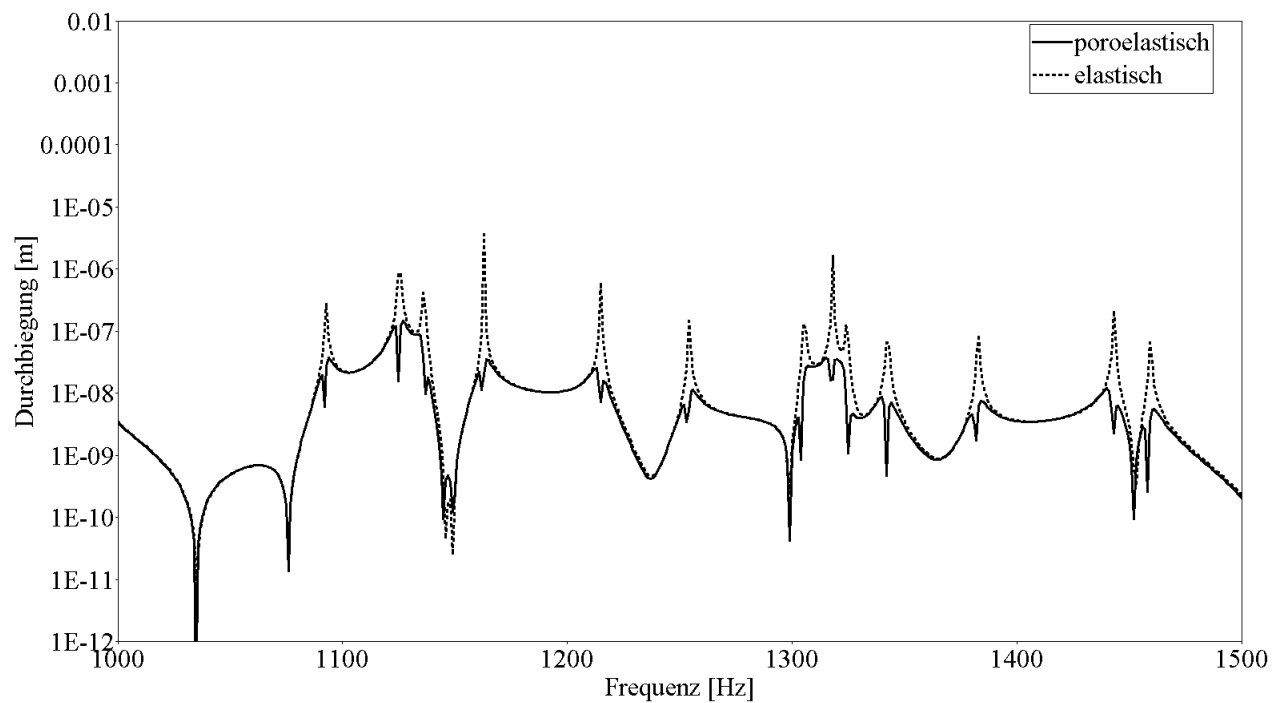


Abbildung 6.20: Frequenzabhängige Durchbiegung am Plattenmittelpunkt für Schaum 485: Frequenz 1000-1500Hz

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit war die Untersuchung des Verhaltens poroelastischer Platten. Die Ergebnisse bilden Ausgangspunkt für die Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung der Schalltransmission durch poröse Flächentragwerke.

Das Verhalten des poroelastischen Materials wurde mit Hilfe der Theorie von Biot abgebildet, wobei als Freiwerte die Festkörperverschiebungen  $u_i$  und der Porendruck  $p$  benutzt wurden.

Um die vorliegende Formulierung für ein dreidimensionales poroelastische Kontinuum in eine zweidimensionale Formulierung umzuformen, wurden die Freiwerte  $u_i$  und  $p$  in eine Potenzreihe bezüglich der Dickenkoordinate entwickelt.

Die Gleichungen für das Prinzip des stationären Gesamtpotential eines dreidimensionalen poroelastischen Kontinuums werden mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung bezüglich der Dickenkoordinate in eine Formulierung für ein zweidimensionales poroelastisches Kontinuum überführt. Dabei entstehen Theorien für ebene Flächentragwerke unterschiedlicher Ordnung. Scheiben- und Plattengleichungen werden vollständig entkoppelt.

Bei Abbruch der Reihe nach linearen Reihengliedern entstehen Plattengleichungen, die denen der Kirchhoffschen Theorie ähneln. Bricht man die Reihe nach den kubischen Reihengliedern ab, erhält man Gleichungen, deren Ergebnisse denen der Reissnerschen Theorie sehr ähnlich sind. Wird die Reihe nach den quadratischen Reihengliedern abgebrochen, entsteht eine Art unfertige Zwischenstufe. Wird der Ansatz von Kienzler verfolgt, indem die Reihenentwicklung nach einer bestimmten Potenz der Plattendicke abgebrochen wird, entstehen durch Abbruch der Reihe nach der Potenz der Plattendicke  $h^3$ , Gleichungen, die auf die Kirchhoffsche Plattentheorie führen. Mit dieser Methode können auch Scheibentheorien hergeleitet werden, was allerdings auf andere Gleichungen als die des ebenen Spannungs- oder Verformungszustandes führt.

Die bei der Herleitung der elastischen Plattentheorien erläuterten Vorgehensweisen wurden in Kapitel 4.2 auf eine poroelastische Struktur übertragen. Dabei entstanden poroelastische Plattentheorien unterschiedlicher Ordnung. Zusätzlich zu den Freiwerten der elastischen Theorie erfolgt hier noch eine Reihenentwicklung für den Porendruck.

Die Überführung der hergeleiteten Gleichungen in eine Finite-Element-Formulierung erfolgt in Kapitel 5. Die Gleichungssysteme für die unterschiedlichen poroelastischen Plattentheorien sowie für die Kopplung von Scheibe und Platte wurden dargestellt und erläutert. Sofern die Plattentheorie Schubterme enthält, muss dabei die Möglichkeit des *shear lockings* in Betracht gezogen werden. Deshalb wird auf die Vermeidung des *shear lockings* mit Hilfe lockingfreier Elemente eingegangen.

In Kapitel 6 erfolgt die Anwendung der entwickelten Berechnungsmethode auf verschiedene Beispiele. Die Plattentheorien unterschiedlicher Ordnung werden miteinander verglichen und anhand von Berechnungen des Verhaltens einer Felsplatte verifiziert. Bei niederen Frequenzen ist die Lage der Eigenfre-

quenz fast identisch. Je höher die Frequenz desto mehr unterscheidet sich der Wert der Eigenfrequenz. Weiterhin wurde der Einfluss der Porosität und der Permeabilität untersucht.

Außerdem wird das Verhalten von einigen Schäumen untersucht. Dabei ist erkennbar, dass die Eigenfrequenzen des poroelastischen Materials im höherfrequenten Bereich stark gedämpft werden.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit haben gezeigt, dass poröse plattenförmige Bauteile als Flächentragwerke berechnet werden können. Die Theorien aus dieser Arbeit können zur Berechnung des Dämmverhaltens poröser Wände genutzt werden. Dafür wäre als nächstes eine Theorie für die Kopplung der porösen Platte mit einem akustischen Fluid zu entwickeln. Um diese Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme zu lösen, müssen die unterschiedlichen Gebiete auf geeignete Weise verknüpft werden.

# Verzeichnis der verwendeten Symbole

$A$	Fläche
$B$	Biegesteifigkeit einer Platte
$\mathbf{f}$	Lastvektor
$f$	Frequenz
$F_i$	Volumenkraft
$G$	Schubmodul
$h$	Plattendicke
$E$	Elastizitätsmodul
$P_i$	Belastung
$P_Q$	Belastung durch Fluss
$G$	Schubmodul
$I$	Flächenträgheitsmoment
$i$	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$k$	Wellenzahl
$k_0$	intrinsische Permeabilität
$K$	Kompressionsmodul
$K^s$	Kompressionsmodul des Festkörperskelettes
$K^f$	Kompressionsmodul des Fluids
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$m_{ij}$	Moment
$m_{ij}^l$	Spannungsresultante
$n$	Flächennormale
$N$	Ansatzfunktion
$p$	Porendruck
$p^0$	Porendruckfreiwert der Scheibe aus Reihenentwicklung
$p^1, p^3$	Porendruckfreiwerte der Platte aus Reihenentwicklung
$q$	spezifischer Fluss
$q^l$	Flussresultante
$R$	poroelastischer Materialparameter (2.5b)
$Q$	poroelastischer Materialparameter (2.5c)
$u_i^s, u_i^f$	Komponenten des Verschiebungsvektors

$w$	Durchbiegung einer Platte
$w_d$	Dickenänderung einer Platte, Freiwert bei Platte ab quadratischem Verschiebungsansatz
$u, v$	Freiwerte Scheibe
$V$	Volumen
$x_1, x_2, x_3$	kartesische Koordinaten
$\alpha$	Biot'scher Spannungskoeffizient
$\alpha_\infty$	Verwindung der Poren
$\beta$	Faktor definiert in Gleichung (2.9)
$\kappa$	Schubverzerrung
$\delta_{ij}$	Kroneckersymbol
$\Delta w_\gamma$	Schubklaffung
$\epsilon_{ij}$	Komponenten des Verzerrungstensors
$\kappa$	Permeabilität
$\Lambda$	charakteristische viskose Länge
$\lambda$	Wellenlänge
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\eta$	hydraulische Viskosität
$\phi$	Porosität
$\Pi$	Potential
$\psi_1, \psi_3, \psi_3$	Verdrehwinkel um $x_1, x_2, x_3$ -Achse
$\Psi_1, \Psi_3, \Psi_3$	Freiwert bei Platte ab kubischem Verschiebungsansatz
$\rho$	Dichte
$\rho_f$	Dichte des Fluids
$\rho_s$	Dichte des Festkörpers
$\rho_a$	apparent mass density
$\sigma_{ij}$	Komponente des Tensors der totalen Spannung
$\sigma_{ij}^s, \sigma^f$	Spannung im Festkörper- bzw. Fluidanteils eines poroelastischen Materials
$\sigma_w$	Strömungswiderstand
$\omega$	Kreisfrequenz
$\omega_0$	<i>rollover frequency</i>
$\Omega$	Gebiet
$\Gamma$	Umrandung
$\zeta$	Variation eines Fluidvolumens über ein Einheitsreferenzvolumen
$(\ )^s, (\ )^f$	Festkörper(solid), Fluid
$(\ )_i$	i-tes Reihenglied
$\frac{\partial}{\partial (\ )}$	partielle Ableitung
$\partial_i$ or $(\ )_{,i}$	partielle Ableitung nach $x_i$
$\nabla = [\partial_i]^T, \nabla^2 = \partial_i \partial_i$	Nablaoperator

( $\dot{\phantom{x}}$ )      Ableitung nach der Zeit

# Literaturverzeichnis

- [1] Ackermann, L.: Simulation der Schalltransmission durch Wände. Braunschweiger Schriften zur Mechanik 43, Technische Universität Braunschweig, Mechanik-Zentrum, 2002.
- [2] Ahrens, H.; Dinkler, D.: *FEM I*. Vorlesungsskript, Institut für Statik, TU Braunschweig, 1988.
- [3] Allard, J.F.: *Propagation of Sound in Porous Media*. Elsevier Applied Science, London, 1993.
- [4] Altenbach, J.; Altenbach, H.; Naumenko, K.: *Ebene Flächentragwerke*. Springer, 1998.
- [5] Bathe, K.J.: *Finite Element Methoden*. Springer, 1996.
- [6] Biot, M.A.: General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics*, **12**, 155–164, 1941.
- [7] Biot, M.A.: Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid. *Journal of Applied Physics*, **26**, 182–185, 1955.
- [8] Biot, M.A.: Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid. *Journal of Applied Physics*, **27**(5), 459–467, 1956.
- [9] Biot, M.A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid.I. Low-Frequency Range. *Journal Acoustic Society of America*, **28**(2), 168–178, 1956.
- [10] Biot, M.A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid.II. Higher Frequency Range. *Journal Acoustic Society of America*, **28**(2), 179–191, 1956.
- [11] Bischoff, M.: *Advanced Finite Element Methods*. Vorlesungsskript, Lehrstuhl für Statik, TU München.
- [12] Bischoff, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1999.
- [13] Bletzinger, K.-U.; Bischoff, M.; Ramm, E.: A Unified Approach for Shear-Locking-Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements. *Computers and Structures*, **75**, 321–334, 2000.
- [14] Bonnet, G.: Basic Singular Solutions for a Poroelastic Medium in the Dynamic Range. *Journal Acoustic Society of America*, **82**(5), 1758–1762, 1987.
- [15] Bonnet, G.; Auriault, J.-L.: Dynamics of Saturated and Deformable Porous Media: Homogenization Theory and Determination of the Solid-Liquid Coupling Coefficients. In *Physics of Finely Divided Matter*. (Boccaro, N.; Daoud, M., Eds.), Springer Verlag, Berlin, 306–316, 1985.

- [16] Bowen, R.M.: Theory of Mixtures. In *Continuum Physics*. (Eringen, A.C., Ed.), Vol. III, Academic Press, New York, 1–127, 1976.
- [17] Bowen, R.M.: Incompressible Porous Media Models by use of the Theory of Mixtures. *International Journal of Engineering Science*, **18**, 1129–1148, 1980.
- [18] Bowen, R.M.: Compressible Porous Media Models by use of the Theory of Mixtures. *International Journal of Engineering Science*, **20**(6), 697–735, 1982.
- [19] Busse, A.; Schanz, M.: A Poroelastic Mindlin-Plate. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **3**, 260–261, 2003.
- [20] Busse, A.; Schanz, M.: A Consistent Theory for Poroelastic Plates. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **5**, 381–382, 2005.
- [21] Champoux, Y.; Allard, J.F.: Dynamic Tortuosity and Bulk Modulus in Air-Saturated Porous Media. *Journal of Applied Physics*, **70**(4), 1975–1979, 1991.
- [22] Cheng, A. H.-D.; Detournay, E.: *Comprehensive Rock Engineering*, Vol. 2 Analysis and Design Methods, Chapter 5 Fundamentals of Poroelasticity. Pergamon Press, 1998.
- [23] Cheng, W.: Schallabstrahlung einer schwingenden Reissner/mindlin Platte. Braunschweiger Schriften zur Mechanik 10, Technische Universität Braunschweig, Mechanik-Zentrum, 1993.
- [24] Coyette, J.P.; Wynesdale, H.: A Finite Element Model for Predicting the Acoustic Transmission Characteristics of Layered Structures. In *Proc. of Inter-Noise 95*. (Bernhard, R.J.; Bolton, J.S., Eds.). Noise Control Foundation, New York, 1279–1282, 1995.
- [25] de Boer, R.: *Theory of Porous Media*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [26] de Boer, R.; Ehlers, W.: Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendungen auf bodenmechanische Probleme, Teil I. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 40, Universität - GH Essen, 1986.
- [27] de Boer, R.; Ehlers, W.: A Historical Review of the Formulation of Porous Media Theories. *Acta Mechanica*, **74**, 1–8, 1988.
- [28] de Boer, R.; Ehlers, W.: The Development of the Concept of Effective Stresses. *Acta Mechanica*, **83**, 77–92, 1990.
- [29] Detournay, E.; Cheng, A. H.-D.: *Fundamentals of Poroelasticity*, Vol. II, *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice & Projects*, Chapter 5, 113–171. Pergamon Press, 1993.
- [30] Diebels, S.: Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien. Bericht Nr. II-4, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik, Lehrstuhl II, 2000.
- [31] Ehlers, W.: Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 47, Universität - GH Essen, 1989.
- [32] Ehlers, W.: Compressible, Incompressible and Hybrid Two-phase Models in Porous Media Theories. *ASME: AMD-Vol.*, **158**, 25–38, 1993.



- [33] Ehlers, W.: Constitutive Equations for Granular Materials in Geomechanical Context. In *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*. (Hutter, K., Ed.), CISM Courses and Lecture Notes, No. 337, Springer-Verlag, Wien, 313–402, 1993.
- [34] Ehlers, W.; Kubik, J.: On Finite Dynamic Equations for Fluid-Saturated Porous Media. *Acta Mechanica*, **105**, 101–117, 1994.
- [35] Fillunger, P.: Der Auftrieb von Talsperren, Teil I-III. *Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst*, 532–570, 1913.
- [36] Fürst, K.: *Eine Erweiterung der klassischen Scheibentheorie*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, 1976.
- [37] Gaul, L.; Kögl, M.; Moser, F.; Schanz, M.: Boundary Element Methods for the Dynamic Analysis of Elastic, Viscoelastic, and Piezoelectric Solids. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*. (Stein, E.; de Borst, R.; Hughes, T.J.R.; Hughes, T.J.R., Eds.), Vol. 2, Solids, Structures and Coupled Problems, John Wiley & Sons, New York, Chister, Weinheim, Chapter 24, to appear 2004.
- [38] Göransson, P.: A 3-D, Symmetric, Finite Element Formulation of the Biot Equation with Application to Acoustic Wave Propagation through an Elastic Porous Medium. *ijnme*, **41**, 167–192, 1998.
- [39] Göransson, P.: Acoustic Finite Elements. *Proceedings of ISAAC6 'Advanced techniques in applied and numerical acoustics*, 1–45, 1998.
- [40] Hencky, H.: Über die Berücksichtigung der Schubverzerrungen in ebenen Platten. *Ingenieur-Archiv*, **16**, 1947.
- [41] Hughes, T.J.R.: *The Finite Element Method*. Prentice Hall, 1987.
- [42] Johnson, D.; Koplik, J.; Dashen, R.: Theory of Dynamic Permeability and Tortuosity in Fluid-Saturated Porous Media. *Journal of Fluid Mechanics*, **176**, 379–402, 1987.
- [43] Kang, Y.J.; Bolton, J.S.: Finite Element Modeling of Isotropic Elastic Porous Material Coupled with Acoustical Finite Elements. *Journal Acoustic Society of America*, **98**(1), 635–643, 1995.
- [44] Kienzler, R.: *Eine Erweiterung der klassischen Schalentheorie; Der Einfluß von Dickenverzerrungen und Querschnittsverwölbungen*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, 1980.
- [45] Kienzler, R.: On Consistent Plate Theories. *Archive of Applied Mechanics*, **72**, 229–247, 2002.
- [46] Kienzler, R.: On Consistent Second-Order Plate Theories. In *Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications*. (Kienzler, R.; Altenbach, H.; Ott, I.; Ott, I., Eds.), Vol. 16, *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 85–96, 2004.
- [47] Kirchhoff, G.R.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **40**, 51–88, 1850.
- [48] Kowalski, U.: *Ebene Flächentragwerke*. Vorlesungsskript, Institut für Statik, TU Braunschweig.

- [49] Langer, S.: Schalltransmission durch Isolierverglasung. Braunschweiger Schriften zur Mechanik 41, Technische Universität Braunschweig, Mechanik-Zentrum, 2001.
- [50] Leissa, A.W.: *Vibration of Plates*. Acoustical Society of America, 1993.
- [51] Lewis, R.W.; Schrefler, B.A.: *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley and Sons, Chichester, 1998.
- [52] Liew, K.M.; Hung, K.C.; Kim, M.K.: Vibrations of Mindlin Plates using Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials. *Journal of Sound and Vibration*, **182**, 77–90, 1995.
- [53] Maguerre, K.; Woernle, H.: *Elastic Plates*. Blaisdell, 1969.
- [54] Mindlin, R.D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31–38, 1951.
- [55] Mindlin, R.D.: An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. A Monograph Prepared for the US-Army Corps Engineering Laboratories Fort Monmouth. Technical report, 1951.
- [56] Nenning, M.: *Modellierung der frequenzabhängigen Interaktion zwischen Festkörper und Porenfluid im Boden*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz, Graz, 2006.
- [57] Panneton, R.; Atalla, N.: A Finite-Element Formulation for the Vibroacoustic Behaviour of Double-Plate Structures with Cavity Absorption. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, **41**, 5–12, 1995.
- [58] Panneton, R.; Atalla, N.: An Efficient Finite Element Scheme for Solving the Three-dimensional Poroelasticity problem in acoustics. *Journal Acoustic Society of America*, **101**, 3287–3297, 1996.
- [59] Panneton, R.; Atalla, N.: Numerical Prediction of Sound Transmission Through Finitly Multilayer Systems with Poroelastic materials. *Journal Acoustic Society of America*, **100**, 346–353, 1996.
- [60] Preußner, G.: *Eine Erweiterung der Kirchhoffschen Plattentheorie*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, 1982.
- [61] Pride, S.; Morgan, F.; Gangi, A.: Drag forces of porous-medium acoustics. *Physical Review B* **47**, (9), 4964–4978, 1993.
- [62] Reissner, E.: On the Theory Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **23**, 1944.
- [63] Reissner, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **12**, A69–A77, 1945.
- [64] Reissner, E.: On Transverse Bending of Elastic Plates, including the effect of transverse Shear Deformation. *International Journal of Solids and Structures*, **11**, 1975.
- [65] Reissner, E.: On the Analysis of first and Second-Order Shear Deformation Effects for Isotropic Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **47**, 1980.
- [66] Riewert, D.: *Berechnung des akustischen Verhaltens mehrschichtiger Isolationssysteme*. Studienarbeit, Technische Universität Hamburg-Harburg, Hamburg, 1999.

- [67] Schanz, M.: On the Equivalence of the Linear Biot's theory and the Linear Theory of Porous Media. *Proc. of the 16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, on CD, 2003.
- [68] Schanz, M.; Busse, A.: Acoustic Behavior of a Poroelastic Mindlin Plate. *Proc. of the 17th ASCE Engineering Mechanics Conference*, on CD, 2004.
- [69] Schanz, M.; Diebels, S.: A Comparative Study of Biot's Theory and the Linear Theory of Porous Media for Wave Propagation Problems. *Acta Mechanica*, **161**(3-4), 213–235, 2003.
- [70] Theodorakopoulos, D.D.; Beskos, D.E.: Flexural Vibrations of Poroelastic Plates. *Acta Mechanica*, **103**, 191–203, 1994.
- [71] Truesdell, C.; Toupin, R.A.: The Classical Field Theories. In *Handbuch der Physik*. (Flügge, S., Ed.), Vol. III/1, Springer-Verlag, Berlin, 226–793, 1960.
- [72] Vardoulakis, I.; Beskos, D.E.: Dynamic Behavior of Nearly Saturated Porous Media. *Mechanics of Materials*, **5**, 87–108, 1986.
- [73] von Terzaghi, K.: Die Berechnung der Durchlässigkeit des Tones aus dem Verlauf der hydromechanischen Spannungserscheinungen. *Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien): Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, **132**, 125–138, 1923.
- [74] Zienkiewicz, O.C.; Chang, C.T.; Bettess, P.: Drained, Undrained, Consolidating and Dynamic Behaviour Assumptions in soils. *Geophysics*, **30**(4), 385–395, 1980.
- [75] Zienkiewicz, O.C.; Shiomi, T.: Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media; The Generalized Biot Formulation and its Numerical Solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **8**, 71–96, 1984.
- [76] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1996.